ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

e questa, come si vede subito, traduce il fatto che tutte le derivate seconde delle componenti (u, v, w) dello spostamento, tranne $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \dots$ se $\mathbf{n}$ è parallelo alle z, sono continue attraverso σ.

Ma ora considerando l'equazione di equilibrio e supposte continue le forze di massa, risulta

$$(\lambda + \mu)\,[\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{s}] + \mu\,[\mathrm{grad}\,\alpha] = 0\,.$$

Se ci riferiamo ad una terna fondamentale $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{n}$ e notiamo che

$$\mathrm{grad}\,\alpha = \frac{d\alpha\,\mathbf{i}}{d\mathrm{M}}\,\mathbf{i} + \frac{d\alpha\,\mathbf{j}}{d\mathrm{M}}\,\mathbf{j} + \frac{d\alpha\,\mathbf{n}}{d\mathrm{M}}\,\mathbf{n}\,;$$

e che grad div $\mathbf{s}$ è lineare nelle $\frac{d\alpha\,\mathbf{i}}{d\mathrm{M}}\,\mathbf{i}\,,\ \frac{d\alpha\,\mathbf{i}}{d\mathrm{M}}\,\mathbf{j}\,, \dots,\ \frac{d\alpha\,\mathbf{n}}{d\mathrm{M}}\,\mathbf{n}$, si conclude che $\left[\frac{d\alpha\,\mathbf{n}}{d\mathrm{M}}\right]\mathbf{n}$ è continua. Da questo risultato e da quello già conseguito si trae che

$$\left[\frac{d\alpha\,\mathbf{a}}{d\mathrm{M}}\right] = 0\,;$$

sono cioè continue le derivate seconde delle componenti di spostamento e quindi continue le derivate prime dello strain.

E così si può continuare.

Fisica matematica. — *Omogeneità delle equazioni e Similitudine nella fisica.* Nota I di Paolo Straneo, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

Origine e argomento di queste ricerche.

1. In questi ultimi anni fu ripetutamente richiamata l'attenzione dei fisici e dei matematici sul Principio della similitudine fisica dalle discussioni provocate da due interessanti pubblicazioni; l'una di Lord Rayleigh (¹) che semplicemente incitava a far maggior uso di quel principio, evidentemente inteso quale immediata estensione del noto Principio della similitudine dinamica a tutti i rami della fisica; l'altra del sig. R. C. Tolman (²),

(¹) *Nature*, vol. 95, n. 2368, marzo 1915; vol. 95, n. 2387 e vol. 95, n. 2389.

(²) Physical Review NS., vol. III, pag. 214: vol. IV, pag. 145; vol. IV, pag. 345; vol. VI, pag. 219; Oefversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Föhandlingar, Bd. LVII Afd. A. N:o 22; Science Reports of the Tôhoku Imp. University, I, vol. V, pag. 33; Physikal Review NS., vol. VIII, pag. 1, pag. 8 e pag. 423.

che esponeva un Principio di similitudine, secondo l'autore, completamente nuovo e differente da quello della similitudine, inteso nel senso precedente.

Le obbiezioni mosse tanto alla piana trattazione dell'illustre fisico inglese, quanto alla più originale teoria del fisico americano, non riguardavano solamente qualche questione particolare, ma vertevano specialmente sulla portata e sulla essenza stessa di cotesti principî. Però, per quanto condotte in forma apparentemente esatta, anzi matematica, lasciarono tutti i contendenti fermi nei loro opposti pareri.

Il desiderio di veder chiaro in una questione fondamentale e di così estrema generalità mi ha condotto ad una serie di considerazioni, delle quali avrò l'onore di render brevemente conto all'Accademia con questa e due altre Note che seguiranno immediatamente.

2. Un primo attento esame delle questioni discusse mi convinse che due erano le principali cause delle divergenze sopra accennate.

La prima era una quasi generale deficienza di esattezza e di metodo nella trattazione di cotesti argomenti; deficienza evidentemente causata dalla scarsa considerazione data nei principali trattati alle teorie fondamentali dell'omogeneità e della similitudine, le quali, pur avendo avute numerose applicazioni in qualche isolato campo pratico, sono in fondo rimaste, per quanto riguarda il loro sviluppo sistematico, quasi al punto a cui le aveva portate il Bertrand colla sua nota Memoria del 1848 e con qualche pubblicazione successiva (1), nelle quali aveva ripresentate più modernamente ed estese alla fisica le concezioni newtoniane sulla similitudine dinamica (2).

L'altra, più sostanziale, causa di divergenze era l'insufficienza della nostra conoscenza dei caratteri delle così dette *costanti universali della fisica*, le quali non furono mai studiate in forma generale e sistematica e sopra tutto in rapporto alle teorie che le avevano introdotte.

Per evitare la prima delle suddette cause di equivoci, porrò subito chiaramente i tratti fondamentali delle Nozioni che userò in seguito. Ciò mi permetterà di giungere, in questa stessa Nota, ad un'esatta caratterizzazione dei Principî dell'omogeneità delle equazioni e della similitudine.

Quando poi, nella Nota seguente, studierò i diversi criteri d'applicazione di questi Principî alle varie teorie della fisica e quindi avrò a fare colle loro costanti universali, eviterò la seconda causa di equivoci col valermi di alcuni dei risultati di un mio studio *sulle relazioni generali fra le costanti universali e le rispettive teorie fisiche*, che è attualmente in corso di pubblicazione negli Atti della R. Accademia di Torino.

(1) Journal de l'École Polytechnique, Cah. 32°, pag. 189; C. R. tom. XXV, pag. 163; tom. LXXXVI, pag. 916; *Leçons sur la théorie mat. de l'électricité*, Chap. XIII.

(2) *Principia*, lib. II, Prop. XXXII e seg.

Così potrò infine, in una terza ed ultima Nota risolvere, come semplici esempî di applicazione delle considerazioni che avranno preceduto, tutte le questioni poste e non esaurite nelle diverse discussioni ricordate in principio.

Le nozioni generali di omogeneità e di similitudine.

3. Per lo scopo che mi prefiggo è necessario di considerare queste nozioni fondamentali nella loro forma più generale e quindi di evitare di concepirle secondo il procedimento ordinariamente usato, che le pone quando è già stato scelto, per le diverse entità fisiche, un determinato sistema di dimensioni e ad esso le riferisce, perchè in questo caso si ottengono le espressioni, non già delle nozioni pure, ma di ciò che esse divengono in conseguenza di quella speciale scelta.

Bastano d'altra parte semplicissime considerazioni per convincersi che tali nozioni sono precedenti a qualsiasi scelta di sistemi di dimensioni; anzi, risalendo ancora in questo senso, si vede senz'altro la possibilità di porre una nozione di similitudine, e quindi quella di omogeneità, ancor più primitive, precedenti non solo a qualsiasi scelta di sistema di dimensioni, ma anche all'ammissione di quelle relazioni fra le differenti entità fisiche, che permettono d'ordinario di ricondurle tutte ad un ristretto numero di esse. Questa similitudine sarebbe assai più ampia della consueta, ma conveniente soltanto ad una scienza nei primi stadî del suo sviluppo.

4. Per fissare queste idee con un esempio, consideriamo per semplicità e brevità il solo caso geometrico e, dapprima, una geometria che, avendo superato di poco il suo primo stadio *qualitativo*, sia giunta solamente a riconoscere le relazioni esistenti fra entità di una stessa specie, per es. i rapporti fra il diametro e la circonferenza nel cerchio, fra la superficie di un cerchio e quella del quadrato ad esso circoscritto, fra il volume dei coni e quello dei cilindri di egual base e di eguale altezza, ecc., ma che non sia ancora giunta a riconoscere le relazioni che permettono di ricondurre le tre nozioni di *lunghezza*, *superficie* e *volume* ad una qualsiasi di esse. Questa geometria, estremamente povera, avrebbe però sempre le sue possibili leggi espresse con equazioni omogenee, anzi triplicemente omogenee per rapporto alle lunghezze, alle superficie ed ai volumi, e corrispondentemente ammetterebbe una similitudine più ampia dell'ordinaria, ossia a tre rapporti indipendenti. Dette quindi l, S e V rispettivamente le lunghezze, le superficie e i volumi in un dato sistema geometrico U, l', S' e V' le omologhe entità in un altro sistema U' e λ, σ e ζ tre parametri arbitrarî, le espressioni delle leggi di quella geometria ammetterebbero il gruppo di trasformazioni:

$$l' = \lambda l \quad , \quad S' = \sigma S \quad , \quad V' = \zeta V \,, \tag{1}$$

e in essa il secondo sistema U' sarebbe *simile* al primo U.

Solamente dopo che tale geometria avrà riconosciute le relazioni esistenti fra le tre entità l, S e V, potrà arricchirsi di molte altre leggi; ma da allora fra i parametri λ, σ e ζ, dapprima arbitrarî, sussisterà il vincolo di essere fra di loro nel rapporto, rispettivamente, di n, n^2 e n^3, ciò che ridurrà l'omogeneità di quelle equazioni e la corrispondente similitudine ad avere effettivamente un solo rapporto arbitrario.

Colla libera convenzione di assumere come fondamentale l'entità di lunghezza e come derivate le altre due, si costituirà poi il sistema ordinario delle dimensioni geometriche e si giungerà finalmente al consueto gruppo delle trasformazioni delle equazioni della geometria:

$$l' = \lambda l \quad , \quad S' = \lambda^2 S \quad , \quad V' = \lambda^3 V \tag{2}$$

che evidentemente è un sottogruppo del gruppo (1).

5. Ai precedenti successivi passi nella posizione delle nozioni dell'omogeneità e della similitudine geometrica corrispondono esattamente omologhi successivi passi nelle posizioni delle corrispondenti nozioni fisiche.

Così, partendo da un omogeneità molto generale e specificando successivamente, a seconda di opportune teorie di dimensioni, si potrebbe giungere a diversi particolari sistemi di equazioni di trasformazione; per esempio, nel caso che si ammetta l'ordinaria teoria delle dimensioni e si assumano come fondamentali le entità lunghezza, tempo, massa, temperatura e quantità di elettricità, si giungerà alle equazioni:

$$\begin{array}{llll}
l' = \lambda\, l. & \text{per le lunghezze} & m' = \mu\, m & \text{per le masse} \\
S' = \lambda^2 S & \text{per le superficie} & f' = \lambda\tau^{-2}\mu\, f & \text{per le forze} \\
V' = \lambda^3 V & \text{per i volumi} & E' = \lambda^2\tau^{-2}\mu\, E & \text{per le energie} \\
\ldots\ldots\ldots & & u' = \lambda^{-1}\tau^{-2}\mu\, u & \text{per le densità di energia} \\
 & & \ldots\ldots\ldots & \\
t' = \tau\, t & \text{per i tempi} & T' = \vartheta\, T & \text{per le temperature} \\
v' = \lambda\tau^{-1} v & \text{per le velocità} & \ldots\ldots\ldots & \\
a' = \lambda\tau^{-2} a & \text{per le accelerazioni} & e' = \eta\, e & \text{per le quantità di elettricità} \\
\nu' = \tau^{-1} \nu & \text{per le frequenze} & E' = \lambda\tau^{-2}\mu\, e\, E & \text{per l'int. del campo elet.} \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots &
\end{array} \tag{3}$$

Esse formano evidentemente un gruppo, sottogruppo di una serie di più ampi gruppi di trasformazione, che per brevità non abbiamo scritto, corrispondenti a fisiche più povere, che ignorassero in tutto o in parte i rapporti fra le diverse entità, per es. la possibilità di ricondurre le entità dinamiche a una geometrica, una cinematica e ad una qualsiasi di esse.

Colle equazioni (3) quindi non è affatto espressa la pura nozione di similitudine fisica, ma bensì ciò che essa diventa, dapprima, per certe determinate ammissioni di relazioni fra le diverse entità e, in seguito, per al scelta di un determinato sistema di dimensioni. Ciò deve essere sempre tenuto presente quando si vogliano formare nuove teorie dell'omogeneità e della similitudine, convenienti a concezioni fisiche differenti dalle ordinarie. Nella terza Nota vedremo per es. come per porre una nozione di similitudine in accordo colla *teoria della relatività* occorra partire da nozioni, precedenti non solo a qualsiasi teoria di dimensioni, ma a qualunque ammissione di dipendenze o relazioni fra le diverse entità e scendere poscia alle particolari determinazioni, tenendo conto delle specialissime relazioni fra le entità fisiche, proprie di quella teoria, senza fidarsi di qualche illusoria coincidenza che possa ottenersi, per qualche caso particolare, mediante qualche speciale disposizione dei parametri arbitrarî λ, τ, μ, ϑ e η delle (3).

Principî dell'omogeneità e della similitudine.

6. Essi si riducono ormai semplicemente all'affermazione che le leggi della fisica devono sempre essere espresse con equazioni omogenee secondo la nozione precedentemente posta (*Principio dell'omogeneità*), oppure alla affermazione che esse devono essere tali, che sia sempre possibile concepire infiniti universi simili al nostro, ai quali si possa idealmente passare mediante equazioni di trasformazioni, da dedursi, a seconda della teoria delle dimensioni ammessa, in modo analogo a quello indicato nel paragrafo precedente (*Principio della similitudine*).

L'applicazione di questi principî alla verifica della logicità di risultati ottenuti per vie sperimentali o teoriche non presenta evidentemente nessuna difficoltà, quando si tenga conto delle dimensioni, non solo delle diverse entità fisiche, ma anche delle diverse costanti dimensionali, che in essi eventualmente intervengano.

E parimenti non presenta serie difficoltà l'applicazione di questi principî alla previsione delle leggi fisiche, che, in una data teoria, possano logicamente sussistere fra date entità, quando possa ritenersi escluso un intervento di costanti universali, come avviene per es. nelle applicazioni alla dinamica.

Ma assai gravi sono invece le difficoltà nel caso in cui sia prevedibile, o almeno non sia escluso, un intervento di tali costanti, poichè tale possibilità rende in generale il problema matematicamente indeterminato, in causa della deficienza della nostra conoscenza delle dimensioni delle costanti universali, che possono intervenire in una data teoria.

Infatti, anche sapendo, per es., che l'esperienza abbia dimostrato esistere in generale fra la temperatura T e la densità dell'energia irraggiata u una relazione del tipo

$$f(u, \mathrm{T}) = \mathrm{C},$$

ove C rappresenta una costante universale di dimensioni ancora ignote, non sarà evidentemente possibile di determinare la forma della f, e quindi prevedere la legge, applicando solamente il principio dell'omogeneità o della similitudine.

Come difficoltà di questo genere possano in generale essere risolte si vedrà nella Nota seguente.

E. M.