ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 dicembre 1917.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Geodesia. — *Sulla determinazione di porzioni della superficie del Geoide per mezzo di misure sopra di essa.* Nota del Socio V. Reina.

1. Alcune notevoli proprietà della superficie del Geoide vennero per la prima volta stabilite, facendo uso di considerazioni geometriche, dal professore Pizzetti (1). La determinazione dei raggi principali di curvatura mediante misure geodetiche ed astronomiche fatte sulla superficie, ha formato l'oggetto di una mia successiva ricerca (2). La questione venne poi ripresa dal prof. Viterbi (3), il quale fece fare un passo notevole alla soluzione del problema, mostrando come, sempre con misure geodetiche ed astronomiche, si possa pervenire alla determinazione dei coefficienti della forma differenziale quadratica che rappresenta il quadrato dell'elemento lineare. Con tali coefficienti, e coi raggi principali di curvatura, vengono ad essere noti anche i coefficienti della seconda forma fondamentale, e si hanno quindi gli elementi necessari all'analisi intrinseca della superficie. Quando le dette osser-

(1) P. Pizzetti, *Contribuzione allo studio geometrico della superficie terrestre*, Giorn. della Soc. di lett. e convers. scient., Genova, 1887.

(2) V. Reina, *Sulla determinazione dei raggi di curvatura di una superficie per mezzo di misure locali sopra di essa*, Rendic. Accad. Lincei, Roma, 1893.

(3) A. Viterbi, *Sulla determinazione degli elementi intrinseci, fondamentali, della superficie terrestre, mediante misure locali*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXV, 1908.

vazioni siano fatte in un numero sufficientemente fitto di punti, le coordinate cartesiane rettangolari dei punti della superficie, si possono ottenere mediante quadrature. Sull'argomento è poi tornato più recentemente il professore Mineo [1], facendo dipendere la soluzione del problema dalla determinazione dei coefficienti della seconda forma fondamentale, e precisando le condizioni alle quali questi debbono soddisfare.

Tanto nel mio lavoro quanto in quelli posteriori sopra citati, fissato un punto P delle superficie, si suppone di associare ad esso uno o due altri punti P_1, P_2 in *direzioni obbligate* uscenti da P. In tali punti debbonsi ripetere le osservazioni astronomiche già fatte in P e debbonsi inoltre misurare le distanze o basi PP_1, PP_2. Appare evidente come tale procedimento tolga di fatto ogni praticità alla soluzione, non sempre potendovi essere la possibilità, quando si operi sulla reale superficie terrestre, di trovare un punto adatto a fungere da stazione astronomica in una direzione obbligata, mentre questa ben raramente potrà prestarsi a compiere una operazione praticamente tanto difficile, qual è una misura di base.

Una soluzione pienamente suscettibile di essere attuata in pratica ho potuto conseguire tenendo un procedimento in certo qual modo inverso di quello suggerito dal prof. Viterbi, ed usufruendo diversamente delle formole e dei risultati contenuti nella sua bella ricerca.

Questo studio, del quale mi occupavo da tempo, ho voluto riprendere e completare in questi giorni, per portare un tributo d'onore alla memoria del valente Geodeta, che arruolatosi volontario al principio di nostra guerra, veniva ferito durante l'offensiva nemica del Trentino, veniva decorato di medaglia al valore, promosso Capitano del Genio per merito di guerra, ed il 18 del decorso novembre valorosamente cadeva sulla linea del Piave in difesa della Patria.

2. Si riferisca la porzione di superficie geoidica che si vuol studiare ad un sistema di assi ortagonali dei quali l'asse delle z sia parallelo all'asse della rotazione diurna. Condotta la normale PN in un punto generico P della superficie, positivamente verso l'esterno, cioè da quella parte verso la quale diminuisce la gravità, e la parallela PM all'asse polare, come è ben noto si dice *piano del meridiano astronomico* il piano MPN e *latitudine astronomica* (φ) di P il complemento dell'angolo MPN. *Longitudine astronomica* (ω) è l'angolo che il piano MPN forma con un piano fisso passante per l'asse della rotazione (*primo meridiano*), ed a questo piano si supporrà disposto parallelamente il piano xz. L'intersezione del piano MPN col piano tangente in P (*piano dell'orizzonte*) si dirà *linea cardinale Nord*, e la perpendicolare ad essa in detto piano *linea cardinale*

[1] C. Mineo, *Sulle superficie riferite a un sistema geografico e sulla determinazione intrinseca del Geoide*, Giorn. di Battaglini, vol. XLVIII, Napoli, 1910.

Est. Meridiano astronomico e *parallelo astronomico* si diranno le due linee del Geoide, passanti per P, lungo le quali è rispettivamente costante la longitudine o la latitudine.

Le direzioni positive delle tre rette fra loro ortogonali: normale alla superficie, retta cardinale Nord, retta cardinale Est, saranno definite dalle tre terne di coseni:

$$(1)\quad \begin{cases} X = \cos\varphi\cos\omega & Y = \cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\omega & Z = \mathrm{sen}\,\varphi \\ X_n = -\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\omega & Y_n = -\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\omega & Z_n = \cos\varphi \\ X_e = -\,\mathrm{sen}\,\omega & Y_e = \cos\omega & Z_e = 0\,. \end{cases}$$

La cardinale Nord si intenderà quindi contata positivamente verso Nord, e la cardinale Est positivamente verso Est.

3. Si consideri una linea della superficie uscente da P e si indichi con θ il suo azimut, contato dalla direzione Nord positivamente verso Est. Con R_1 ed R_2 si denotino i due raggi principali di curvatura della superficie in P, raggi che si assumeranno come positivi, limitandoci alla considerazione del caso, sempre del resto fino ad ora verificato in pratica, che il Geoide rivolga all'esterno la sua convessità; e si indichi infine con θ_0 l'azimut della linea di curvatura alla quale corrisponde il raggio di curvatura R_1.

Se ds è l'elemento lineare PP′ della linea, e $d\varepsilon$ l'angolo fra le due normali alla superficie in P e P′, si ha per il teorema di Hamilton:

$$\left(\frac{d\varepsilon}{ds}\right)^2 = \frac{\cos^2(\theta-\theta_0)}{R_1^2} + \frac{\mathrm{sen}^2(\theta-\theta_0)}{R_2^2}$$

$$\left(\frac{d\varepsilon}{ds}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_2^2}\right)\cos 2(\theta-\theta_0)$$

e questa si può scrivere

$$\left(\frac{d\varepsilon}{ds}\right)^2 = x + y\cos 2\theta + z\,\mathrm{sen}\,2\theta$$

quando si ponga

$$(2)\quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}\right) \qquad y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_2^2}\right)\cos 2\theta_0 \\ z = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_2^2}\right)\mathrm{sen}\,2\theta_0\,. \end{cases}$$

Se il valore di $\frac{d\varepsilon}{ds}$ viene determinato in corrispondenza a tre direzioni uscenti da P, e si formano le tre equazioni corrispondenti, si potranno de-

terminare le tre incognite $x\,y\,z$ e quindi per le (2) risulteranno determinati tanto i raggi di curvatura quanto l'orientamento delle linee di curvatura.

Se si fa la rappresentazione sferica Gaussiana della superficie, l'angolo elementare $d\varepsilon$, che non è poi altro che l'elemento lineare corrispondente a ds sulla sfera, è dato da

$$d\varepsilon^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = d\varphi^2 + \cos^2\varphi\, d\omega^2 .$$

Passando quindi da punti infinitamente vicini a punti aventi distanza finita Δs, se $\varphi\omega$, $\varphi'\omega'$ sono le coordinate astronomiche determinate agli estremi di Δs, si avrà:

$$\Delta\varepsilon^2 = (\varphi' - \varphi)^2 + \cos^2\varphi\,(\omega' - \omega)^2 \tag{3}$$

ed i valori di $\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s}$ sostituiti nella

$$\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s}\right)^2 = x + y\cos 2\theta + 2\,\mathrm{sen}\,2\theta \tag{3'}$$

daranno le tre equazioni occorrenti per la determinazione di R_1, R_2 e θ_0. Meglio sarà se si dispone di un numero maggiore di punti intorno a P, perchè, potendosi allora applicare il metodo di risoluzione dei minimi quadrati, con tanta maggiore accuratezza verranno ad essere determinate le tre incognite R_1, R_2 e θ_0.

4. Nella rappresentazione sferica le linee del meridiano astronomico e del parallelo astronomico passanti per P hanno per corrispondenti il meridiano ed il parallelo della sfera incrociantisi ad angolo retto nel punto immagine π, e le tangenti a questi ultimi in π saranno parallele alla linea cardinale Nord ed alla linea cardinale Est rispettivamente.

È noto d'altra parte che, perchè due elementi lineari ds e δs uscenti da P sulla superficie siano coniugati, deve essere soddisfatta la condizione

$$dX\,\delta x + dY\,\delta y + dZ\,\delta z = 0$$

e questa esprime la ben nota proprietà che δs è ortogonale all'elemento corrispondente a ds nella rappresentazione sferica. Ne segue quindi che: *la tangente coniugata a quella del meridiano astronomico coincide colla direzione cardinale Est, e la direzione coniugata a quella del parallelo astronomico coincide colla direzione cardinale Nord.*

Questa proprietà venne per la prima volta dimostrata per via geometrica dal prof. Pizzetti.

Si indichino con α e β gli azimut del meridiano e del parallelo astronomico, e quindi con $\alpha - \theta_0$, $\beta - \theta_0$ gli angoli che essi formano colla linea di curvatura corrispondente al raggio R_1, contati sempre nel senso positivo. Essendo $\sqrt{R_1}$, $\sqrt{R_2}$ i semiassi della ellisse indicatrice, dovranno

essere soddisfatte per le due coppie di direzioni coniugate le due relazioni:

$$(4)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}(\alpha-\theta_0)\operatorname{tg}(90-\theta_0) = -\dfrac{R_2}{R_1} \\ \operatorname{tg}(-\theta_0)\quad \operatorname{tg}(\beta-\theta_0) = -\dfrac{R_2}{R_1} \end{cases}$$

e queste, noti R_1, R_2 e θ_0, determineranno i due azimut α e β.

5. Sia

$$ds^2 = E\,d\varphi^2 + 2\,F\,d\varphi\,d\omega + G\,d\omega^2$$

il quadrato dell'elemento lineare delle superficie in coordinate astronomiche (prima forma fondamentale) e si denotino come di solito con D, D', D'' i coefficienti della seconda formola fondamentale

$$D = -\sum \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial X}{\partial \varphi} \qquad D' = -\sum \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial X}{\partial \omega} = -\sum \frac{\partial x}{\partial \omega}\frac{\partial X}{\partial \varphi}$$

$$D'' = -\sum \frac{\partial x}{\partial \omega}\frac{\partial X}{\partial \omega}.$$

Tenendo presente che i coseni di direzione della linea cardinale Nord e della linea cardinale Est sono dati da

$$\frac{\partial X}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial Z}{\partial \varphi}$$

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial X}{\partial \omega}, \quad \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial Y}{\partial \omega}, \quad \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial Z}{\partial \omega}$$

rispettivamente, come risulta dalle (1) od anche dalla considerazione dell'elemento lineare della rappresentazione sferica, si avrà

$$(5)\qquad \sum \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial X}{\partial \varphi} = \cos\alpha \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial X}{\partial \omega} = \operatorname{sen}\alpha$$

$$(6)\qquad \sum \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial \omega}\cdot\frac{\partial X}{\partial \varphi} = \cos\beta \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial \omega}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial X}{\partial \omega} = \operatorname{sen}\beta$$

e quindi

$$(7)\qquad \begin{cases} -D = \sqrt{E}\cos\alpha \qquad -D' = \sqrt{E}\operatorname{sen}\alpha\cos\varphi \\ -D' = \sqrt{G}\cos\beta \qquad -D'' = \sqrt{G}\operatorname{sen}\beta\cos\varphi, \end{cases}$$

$$D'^2 = \sqrt{EG}\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\cos\varphi.$$

Indicando con $d\sigma$ l'elemento superficiale del Geoide, con $d\Sigma$ quello corrispondente della sfera rappresentativa, si ha

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, d\varphi\, d\omega \qquad d\Sigma = \cos\varphi\, d\varphi\, d\omega$$

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{d\Sigma}{d\sigma} = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{EG - F^2}},$$

ed essendo d'altra parte

$$\text{(8)} \qquad \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} \qquad \cos(\alpha - \beta) = \frac{F}{\sqrt{EG}},$$

si avrà

$$\sqrt{EG} = R_1 R_2 \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}$$

$$D'^2 = R_1 R_2 \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos\beta \cos^2\varphi}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)},$$

mentre dalle (7) e dalla seconda delle (8) si ricava

$$\text{(9)} \qquad E = R_1 R_2 \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(\alpha - \beta)} \qquad G = R_1 R_2 \frac{\operatorname{sen}\alpha \cos^2\varphi}{\cos\beta \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}$$

$$F = R_1 R_2 \operatorname{cotg}(\alpha - \beta) \cos\varphi .$$

Risultano così determinati, in funzione di grandezze osservate, tanto i coefficienti della prima quanto quelli della seconda forma fondamentale.

6. Si scrivano le (5) sotto la forma

$$\Sigma \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot X_n = \cos\alpha \qquad \Sigma \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot X_e = \operatorname{sen}\alpha \quad .$$

e vi si aggiunga la relazione

$$\Sigma \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot X = 0 .$$

Da queste si ricava

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \cos\alpha \cdot X_n + \operatorname{sen}\alpha \cdot X_e$$

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \cos\alpha \cdot Y_n + \operatorname{sen}\alpha \cdot Y_e$$

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \cos\alpha \cdot Z_n$$

$$\text{(10)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} &= -\sqrt{E}\,(\cos\alpha \operatorname{sen}\varphi \cos\omega + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\omega) \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} &= -\sqrt{E}\,(\cos\alpha \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\omega - \operatorname{sen}\alpha \cos\omega) \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} &= \sqrt{E} \cos\alpha \cos\varphi . \end{aligned} \right.$$

Analogamente dalle (6), quando vi si aggiunga la relazione

$$\sum \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial \omega} \cdot X = 0 ,$$

si ricaverà

$$(11) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \omega} = -\sqrt{G}\,(\cos\beta \operatorname{sen}\varphi \cos\omega + \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\omega) \\ \dfrac{\partial y}{\partial \omega} = -\sqrt{G}\,(\cos\beta \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\omega - \operatorname{sen}\beta \cos\omega) \\ \dfrac{\partial z}{\partial \omega} = \sqrt{G} \cos\beta \cos\varphi . \end{cases}$$

Le (10) e (11) [1] permetteranno di determinare le coordinate dei punti della superficie geoidica mediante quadrature, a meno di una costante, quando in funzione di φ ed ω siano stati determinati i valori di α, β, E, G in un numero sufficientemente fitto di punti.

A forma più semplice si riducono le (10) e (11) quando, invece di E, G, per le (7), si sostituiscano D, D′, D″, ottenendosi allora

$$(10') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = D \operatorname{sen}\varphi \cos\omega + \dfrac{D'}{\cos\varphi} \operatorname{sen}\omega \\ \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = D \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\omega - \dfrac{D'}{\cos\varphi} \cos\omega \\ \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = -D \cos\varphi \end{cases}$$

$$(11 \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \omega} = D' \operatorname{sen}\varphi \cos\omega + \dfrac{D''}{\cos\varphi} \operatorname{sen}\omega \\ \dfrac{\partial y}{\partial \omega} = D' \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\omega - \dfrac{D''}{\cos\varphi} \cos\omega \\ \dfrac{\partial z}{\partial \omega} = -D' \cos\varphi . \end{cases}$$

Riesce più facile stabilire con queste che non colle (10) e (11) le condizioni di integrabilità. Esse conducono alle equazioni di Mainardi-Codazzi

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial D''}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial D'}{\partial \omega} + D \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + D'' \operatorname{tg}\varphi = 0 \\ \dfrac{\partial D}{\partial \omega} - \dfrac{\partial D'}{\partial \varphi} + D' \operatorname{tg}\varphi = 0 . \end{cases}$$

[1] Le formole (10) e (11) si trovano nella Memoria del Viterbi, e le (10′) e (11′) colle relative condizioni di integrabilità in quella di Mineo.

7. Ecco quindi come si può procedere praticamente per determinare la considerata porzione di superficie geoidica. Si traccia su di essa una rete trigonometrica, e sarà bene che i triangoli siano di piccole dimensioni, ed i vertici riescano quindi molto fitti. Le dimensioni della rete potranno risultare da un'unica misura di base e da misure angolari. Si faccia in ogni vertice una determinazione di latitudine, di longitudine e di azimut. Se φ, ω sono le coordinate astronomiche di un vertice P e φ', ω' quelle di uno P' dei vertici circostanti, si potrà colla (3) calcolare l'angolo fra le verticali in P e P' e stabilire tante equazioni del tipo (3') quanti sono i lati uscenti da P. La loro risoluzione fatta col metodo dei minimi quadrati permetterà di determinare i due raggi di curvatura R_1, R_2 della superficie in P e l'azimut θ_0 della linea di curvatura corrispondente al raggio R_1. Dalle (4) si ricaveranno allora i valori di α e β (azimut del meridiano astronomico e del parallelo astronomico), mentre le (7) e (9) condurranno alla determinazione dei coefficienti E, G, D, D', D'' delle due forme fondamentali. Conosciuti questi valori nei vertici della rete e determinandone per interpolazione i valori nei punti intermedî, le (10) e (11) oppure le (10') e (11') permetteranno di determinare per quadrature, a meno di una costante, in funzione di φ ed ω, le coordinate cartesiane dei punti della superficie.

Tenuto presente che la superficie del Geoide non è suscettibile nel suo complesso di un'unica rappresentazione analitica, ma è piuttosto da considerarsi come risultante dalla connessione di porzioni di superficie analitiche diverse, nell'applicare il procedimento sopra indicato bisognerà aver riguardo di non oltrepassare i limiti dove, a causa di rapide variazioni di densità della crosta terrestre, possano verificarsi discontinuità nei valori di R_1, R_2 e θ_0. L'essere o meno soddisfatte dai valori sperimentali le equazioni (12) costituirà una prova dell'essersi tali limiti oppur no oltrepassati.

Un'ultima osservazione resta a fare: le misure geodetiche ed astronomiche vengono eseguite sulla superficie fisica terrestre, mentre la considerata rete trigonometrica si suppone tracciata sulla superficie del Geoide, ma è ben noto che la riduzione delle misure considerate (basi, latitudini, longitudini, azimut) al Geoide, od a livello del mare, costituisce uno dei problemi della Geodesia dei quali già si possiede una soddisfacente soluzione.