ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Matematica. — *Hamiltoniani e gradienti di hamiltoniani e di gradienti, laplassiani, parametri differenziali.* Nota I di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra.

La presente Nota, e due altre che le faranno seguito sull'argomento, sono collegate con quelle che già fecero comparsa nei Rend. della R. Acc. di Napoli (¹), ed in questi medesimi Rendiconti (²) relative ad hamiltoniani e gradienti, e con un'altra che comparirà prossimamente nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo (³). Tenuto conto che, dalla applicazione di hamiltoniani e di gradienti, ad una funzione scalare od estensiva U a più variabili, nascono di nuovo funzioni scalari ed estensive, la quistione di esaminare come si presentano gli hamiltoniani ed i gradienti di hamiltoniani e di gradienti d'una stessa funzione U, nelle loro forme di riduzione ultimata (forme *tipiche*), diviene essenziale, non soltanto per la necessità d'imprimere rapidità di maneggio al calcolo in tutte quelle volte nelle quali siffatti operatori entrano in giuoco, ma pure perchè, con la quistione istessa vengono a far comparsa nuove funzioni invariantive e nuove relazioni, fra cui qualcuna apparve già (da altri punti di vista), in ricerche coordinate ai potenziali in più variabili (cfr. specialmente la 2ª delle altre due Note suddette).

Le funzioni da esaminare (per le definizioni e le notazioni ci manteniamo conformi ai lavori precedenti) in simboli si presentano come segue:

$$(1)\qquad \nabla_\Omega(\mathrm{G}_\Omega \mathrm{U})\ ,\quad \mathrm{G}_\Omega(\nabla_\Omega \mathrm{U})\ ,\quad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega \mathrm{U})\ ,\quad \mathrm{G}_\Omega(\mathrm{G}_\Omega \mathrm{U});$$

ma, di esse, soltanto le prime tre, e l'ultima parzialmente, vengono ad essere prese in considerazione nella presente Nota.

1° caso: $\nabla_\Omega(\mathrm{G}_\Omega \mathrm{U})$. Dalla definizione stessa di ∇_Ω e G_Ω segue essere

$$\nabla_\Omega(\mathrm{G}_\Omega \mathrm{U}) = \nabla_\Omega \left\{ \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega_1}\mathrm{E}_1 + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega_2}\mathrm{E}_2 + \cdots + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega_m}\mathrm{E}_m \right\};$$

(¹) *Gli hamiltoniani ed i gradienti* etc. (NI, NII), 1 ed 8 luglio 1916; *Gli hamiltoniani ed i gradienti rispetto a formazioni non interamente libere*, 7 novembre 1916.

(²) *Gli hamiltoniani ed i gradienti di formazioni estensive* etc., fasc. 6°, settembre 1916; *Proprietà generali degli hamiltoniani e dei gradienti* etc., fasc. 7°, 8 ottobre 1916; *Gli hamiltoniani ed i gradienti del prodotto di due formazioni estensive*, fasc. 9°, 5 novembre 1916.

(³) *Hamiltoniani e gradienti particolari nell'analisi* etc., novembre 1917 (in appresso verrà indicata con « N. Ist. L. ».

e quindi, visto che $G_\Omega U$ è di specie ϱ, sarà $\nabla_\Omega(G_\Omega U)$ eguale alla divergenza di $G_\Omega U$ (N. Ist. L., n. 1); cioè si avrà

$$\nabla_\Omega(G_\Omega U) = (-1)^{\varrho\varrho'}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\omega_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\omega_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 U}{\partial\omega_m}\right). \tag{2}$$

2° caso: $G_\Omega(\nabla_\Omega U)$. Analogamente a quanto si è testè detto, tenuto conto che $\nabla_\Omega U$ è di specie $\varrho' = n+1-\varrho$, si ha

$$\begin{aligned} G_\Omega(\nabla_\Omega U) &= (-1)^{\varrho\varrho'}\left\{G_\Omega(-1)^{\varrho\varrho'}\frac{\partial U}{\partial\omega_1}|E_1 + \cdots + G_\Omega(-1)^{\varrho\varrho'}\frac{\partial U}{\partial\omega_m}|E_m\right\} \\ &= G_\Omega\frac{\partial U}{\partial\omega_1}|E_1 + G_\Omega\frac{\partial U}{\partial\omega_2}|E_2 + \cdots + G_\Omega\frac{\partial U}{\partial\omega_m}|E_m; \end{aligned} \tag{3}$$

ovvero, per essere $(E_i|E_i) = 1$, $(E_i|E_k) = 0$ $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$:

$$G_\Omega(\nabla_\Omega U) = \frac{\partial^2 U}{\partial\omega_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\omega_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 U}{\partial\omega_m^2}. \tag{4}$$

La funzione scalare, a secondo membro della (4), sarà detta *laplassiano* della U, e sarà indicata con $L_\Omega U$. Così, mentre per le (2), (4) possiamo simbolicamente scrivere

$$\nabla_\Omega(G_\Omega U) = (-1)^{\varrho\varrho'} L_\Omega U, \quad G_\Omega(\nabla_\Omega U) = L_\Omega U,$$

da cui deducesi

$$L_\Omega U = G_\Omega(\nabla_\Omega U) = (-1)^{\varrho\varrho'}\nabla_\Omega(G_\Omega U), \tag{5}$$

in linguaggio ordinario possiamo dire:

α) *Il gradiente [l'hamiltoniano] dell'hamiltoniano [del gradiente] di una funzione scalare* U *eguaglia l'hamiltoniano [il gradiente] moltiplicato per* $(-1)^{\varrho\varrho'}$, *del gradiente [dell'hamiltoniano] di* U, *e vale il laplassiano di* U *[moltiplicato per* $(-1)^{\varrho\varrho'}$*]; sicchè:*

β) *Il laplassiano di una funzione scalare* U *mentre eguaglia sempre il gradiente dell'hamiltoniano di* U, *eguaglia l'hamiltoniano del gradiente di* U, *soltanto rispetto a formazioni di specie pari in qualunque spazio e rispetto a formazioni di specie dispari in ispazii a numero pari di dimensioni.*

In grazia della definizione di *divergenza* (cfr. N. Ist. L.) di una funzione estensiva, quando per questa si prende $G_\Omega U$, e del 1° caso precedente, a fianco della (5) possiamo scrivere

$$L_\Omega U = (-1)^{\varrho\varrho'} D_\Omega(G_\Omega U); \tag{6}$$

vale a dire, in linguaggio ordinario:

Il laplassiano di una funzione scalare U *vale la divergenza, moltiplicata per* $(-1)^{\varrho\varrho'}$, *del gradiente di* U. — Con significato evidente per le abbreviazioni di parole introdotte, ma con l'intesa che non è opportuno abusarne nei calcoli, anche per l'incertezza che potrebbe seguire dalla completa soppressione della Ω, alle (5), (6) potrebbero sostituirsi le seguenti:

$$(5') \qquad \text{grad ham U} = (-1)^{\rho\rho'} \text{ ham grad U} = \text{lap U}$$

$$(6') \qquad \text{lap U} = (-1)^{\rho\rho'} \text{ div grad U};$$

sicchè, *in ogni spazio rispetto a formazioni d'ordine pari, ed in ispazii ad un numero pari di dimensioni pure rispetto a formazioni d'ordine dispari, vale la relazione*

$$(7) \qquad \text{lap U} = \text{div grad U},$$

mentre che negli spazii ad un numero dispari di dimensioni, rispetto a formazioni d'ordine dispari, vale l'altra

$$(7') \qquad \text{lap U} = -\text{ div grad U}.$$

Un breve esempio al riguardo non è senza interesse presentarlo qui. Sia Ω, nello spazio ordinario *misto* di punti e vettori, il *punto* (o il *vettore*)

$$(8) \qquad \Omega = e + xi + yj + zk \quad (\text{o } \Omega = xi + yj + zk)$$

e sia $U(x, y, z)$ una funzione di esso punto (o vettore); siccome si ha, per entrambi i casi, $n = 3$, $\varrho = 1$, $\varrho' = n + 1 - \varrho = 3$, così sarà

$$(8') \qquad \text{div grad U} = -\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right).$$

Se, in vece, si suppone Ω essere un vettore nello *spazio vettoriale puro*, ed U la medesima funzione testè considerata; siccome, in tal caso, si ha $n = \varrho' = 2$, $\varrho = 1$, così sarà

$$(8'') \qquad \text{div grad U} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

3° caso. $\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U)$. Dalla espressione del ∇_Ω per funzioni scalari segue essere:

$$(9) \quad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega U) = \nabla_\Omega \left\{ (-1)^{\rho\rho'} \left(\frac{\partial U_1}{\partial \omega_1} |E_1 + \frac{\partial U}{\partial \omega_2} |E_2 + \cdots + \frac{\partial U}{\partial \omega_m} |E_m \right) \right\};$$

e quindi, poichè ora è (con riferim. alla espress. di $\nabla_\Omega U$, per U di specie σ)

$$\sigma = \varrho', \quad \varrho' + \sigma < n + 1, \quad \text{d'onde} \quad 2\varrho' < n + 1, \quad \text{sarà:}$$

$$(9')\quad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega \mathrm{U}) = (-1)^{\varrho'(n+1)} \left\{ \nabla_\Omega\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega_1} | \mathrm{E}_1\right) + \right.$$
$$\left. + \nabla_\Omega\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega_2} | \mathrm{E}_2\right) + \cdots + \nabla_\Omega\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \omega_m} | \mathrm{E}_m\right) \right\} =$$
$$= (-1)^{\varrho'} \left\{ \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \omega_1\, \partial \omega_2} [|\mathrm{E}_1 | \mathrm{E}_2 + |\mathrm{E}_2 | \mathrm{E}_1] + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \omega_1\, \partial \omega_3} [|\mathrm{E}_1 | \mathrm{E}_2 + |\mathrm{E}_2 | \mathrm{E}_1] + \cdots + \right.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \omega_i\, \partial \omega_k} [|\mathrm{E}_i | \mathrm{E}_k + |\mathrm{E}_k | \mathrm{E}_i] + \cdots + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \omega_{m-1}\, \partial \omega_m} [|\mathrm{E}_{m-1} | \mathrm{E}_m + |\mathrm{E}_m | \mathrm{E}_{m-1}]$$

con $i < k$, dopo avere osservato che, a fianco del fattore $(-1)^{\varrho'(n+1)}$, si presenta ancora il fattore $(-1)^{\varrho\varrho'}$, che $\varrho'(n+1) + \varrho\varrho' \equiv \varrho' \pmod 2$ e che $\mathrm{E}_i | \mathrm{E}_k = 0$ per tutti i valori distinti di i, k da 1 ad m. In una forma concisa, la formula precedente sarà scritta:

$$(10)\qquad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega \mathrm{U}) = (-1)^{\varrho'} \sum \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \omega_i\, \partial \omega_k} | (\mathrm{E}_i\, \mathrm{E}_k + \mathrm{E}_k\, \mathrm{E}_i)$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, m;\ i < k).$$

Se, con $\varrho' = \sigma$, è $\varrho' + \sigma = n + 1$, ovvero $2\varrho' = n + 1$ l'espressione (10) pel $\nabla_\Omega(\nabla_\Omega \mathrm{U})$ rimane immutata; ma se, con $\varrho' = \sigma$, è $\varrho' + \sigma > n + 1$, cioè $2\varrho' > n + 1$, allora il calcolo precedente circa la potenza di -1 che deve accompagnare l'espressione a 2° membro della (10), porta che deve essere $(-1)^\varrho$. Così, per $2\varrho' \leq n + 1$, ovvero per $2\varrho \geq n + 1$ si ha la (10), e per $2\varrho' \geq n + 1$, cioè $2\varrho \leq n + 1$, si ha la

$$(10')\qquad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega \mathrm{U}) = (-1)^{\varrho} \sum \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \omega_i\, \partial \omega_k} | (\mathrm{E}_i\, \mathrm{E}_k + \mathrm{E}_k\, \mathrm{E}_i).$$

Ma, se $\varrho \geq \varrho'$, cioè se $2\varrho \geq n + 1$, si ha

$$(11)\qquad \mathrm{E}_k\, \mathrm{E}_i = (-1)^{\varrho'^2}\, \mathrm{E}_i\, \mathrm{E}_k = (-1)^{\varrho'}\, \mathrm{E}_i\, \mathrm{E}_k \qquad (i, k \text{ come sopra});$$

e se è, invece, $\varrho \leq \varrho'$, cioè se $2\varrho \leq n + 1$, si ha

$$(11')\qquad \mathrm{E}_k\, \mathrm{E}_i = (-1)^{\varrho^2}\, \mathrm{E}_i\, \mathrm{E}_k = (-1)^{\varrho}\, \mathrm{E}_i\, \mathrm{E}_k \qquad (i, k \text{ idem});$$

dunque: Se $2\varrho \geq n + 1$, dalla sostituzione in (10) di (11) si ha

$$(12)\qquad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega \mathrm{U}) = [1 + (-1)^{\varrho'}] \sum \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \omega_i\, \partial \omega_k} | \mathrm{E}_i\, \mathrm{E}_k \quad (i, k \text{ come sopra});$$

e se $2\varrho \leq n + 1$, dalla sostituzione in (10′) della (11′) si ha

$$(12')\qquad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega \mathrm{U}) = [1 + (-1)^{\varrho}] \sum \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \omega_i\, \partial \omega_k} | \mathrm{E}_i\, \mathrm{E}_k \quad (i, k \text{ come sopra}).$$

Intanto, notiamo subito che, *se ϱ' è dispari*, cioè se ϱ ed $n+1$ sono di parità diversa (ovvero se ϱ ed n sono della stessa parità, voglio dire se sono della stessa parità la specie della formazione Ω ed il numero n delle dim. dello spazio in cui si opera) *e se è $\varrho \geq \varrho'$, la* (12) *fornisce*

$$\nabla_\Omega(\nabla_\Omega \mathrm{U}) = 0 . \tag{13}$$

Ed in modo analogo, *se ϱ è dispari ed è $\varrho \leq \varrho'$ questa medesima* (13) *è fornita dalla* (12'). Ne concludiamo che, *eccettuato i casi in cui sia ϱ' pari e $\varrho \geq \varrho'$*, ovvero *sia ϱ pari e $\varrho \leq \varrho'$, l'hamiltoniano dell'hamiltoniano d'una funzione scalare* U *è identicamente nullo*. — *Nei casi eccettuati*, dalla (12) per ϱ' pari e $\varrho \geq \varrho'$ ovvero $2\varrho \geq n+1$, e dalla (12') per ϱ pari e $\varrho \leq \varrho'$ ovvero $2\varrho \leq n+1$, si ricava che *l'espressione dell'hamiltoniano dell'hamiltoniano di una funzione scalare* U *ha la forma di tipo unico seguente*:

$$\nabla_\Omega(\nabla_\Omega \mathrm{U}) = 2\sum \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial\omega_i\,\partial\omega_k} |\mathrm{E}_i\,\mathrm{E}_k \qquad (i\,,k = 1\ 2\,,\dots,m\,;\,i<k)\,. \tag{14}$$

Attenzione speciale merita il caso in cui sia $2\varrho \leq n+1$ e ϱ *pari*; ma di esso sarà fatto rilievo nella Nota successiva.

Fisica matematica. — *Omogeneità delle Equazioni e Similitudine nella Fisica*. Nota II di Paolo Straneo, presentata dal Corrispondente Di Legge.

Criterii per l'applicazione dei Principii precedenti.

1. Per proseguire nella ricerca iniziata nella Nota precedente, sono indispensabili alcune considerazioni generali sui criterî tipici coi quali vengono ordinariamente applicati i principî dell'Omogeneità e della Similitudine.

Possiamo dividerli in due categorie nettamente distinte.

La prima comprenderà i metodi che procedono dalla considerazione di infiniti sistemi astratti, simili a quello che si vuol studiare secondo rapporti di similitudine completamente arbitrarî per le entità fondamentali e in accordo colla teoria delle dimensioni per le altre, e cercano le relazioni fra entità fisiche che rimangano invariate quando si passi dall'uno all'altro di detti sistemi.

La seconda comprenderà invece i metodi che procedono dalla considerazione di sistemi simili, ai cui rapporti di similitudine siano stati imposti opportuni vincoli, in modo che possa rimanere invariato qualche elemento essenziale di questi sistemi; per es. alcune proprietà caratteristiche del mezzo in cui avvengono i fenomeni, o del fluido su cui galleggiano i corpi si-