ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Intanto, notiamo subito che, *se ϱ' è dispari*, cioè se ϱ ed $n+1$ sono di parità diversa (ovvero se ϱ ed n sono della stessa parità, voglio dire se sono della stessa parità la specie della formazione Ω ed il numero n delle dim. dello spazio in cui si opera) *e se è $\varrho \geq \varrho'$, la* (12) *fornisce*

$$\nabla_\Omega(\nabla_\Omega \mathrm{U}) = 0. \tag{13}$$

Ed in modo analogo, *se ϱ è dispari ed è $\varrho \leq \varrho'$ questa medesima* (13) *è fornita dalla* (12'). Ne concludiamo che, *eccettuato i casi in cui sia ϱ' pari e $\varrho \geq \varrho'$*, ovvero *sia ϱ pari e $\varrho \leq \varrho'$, l'hamiltoniano dell'hamiltoniano d'una funzione scalare* U *è identicamente nullo*. — *Nei casi eccettuati*, dalla (12) per ϱ' pari e $\varrho \geq \varrho'$ ovvero $2\varrho \geq n+1$, e dalla (12') per ϱ pari e $\varrho \leq \varrho'$ ovvero $2\varrho \leq n+1$, si ricava che *l'espressione dell'hamiltoniano dell'hamiltoniano di una funzione scalare* U *ha la forma di tipo unico seguente*:

$$\nabla_\Omega(\nabla_\Omega \mathrm{U}) = 2\sum \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial\omega_i\, \partial\omega_k} |\mathrm{E}_i\, \mathrm{E}_k \qquad (i\,, k = 1\ 2\,, \ldots, m\,;\ i < k)\,. \tag{14}$$

Attenzione speciale merita il caso in cui sia $2\varrho \leq n+1$ e ϱ *pari*; ma di esso sarà fatto rilievo nella Nota successiva.

Fisica matematica. — *Omogeneità delle Equazioni e Similitudine nella Fisica.* Nota II di Paolo Straneo, presentata dal Corrispondente Di Legge.

Criterii per l'applicazione dei Principii precedenti.

1. Per proseguire nella ricerca iniziata nella Nota precedente, sono indispensabili alcune considerazioni generali sui criterî tipici coi quali vengono ordinariamente applicati i principî dell'Omogeneità e della Similitudine.

Possiamo dividerli in due categorie nettamente distinte.

La prima comprenderà i metodi che procedono dalla considerazione di infiniti sistemi astratti, simili a quello che si vuol studiare secondo rapporti di similitudine completamente arbitrarî per le entità fondamentali e in accordo colla teoria delle dimensioni per le altre, e cercano le relazioni fra entità fisiche che rimangano invariate quando si passi dall'uno all'altro di detti sistemi.

La seconda comprenderà invece i metodi che procedono dalla considerazione di sistemi simili, ai cui rapporti di similitudine siano stati imposti opportuni vincoli, in modo che possa rimanere invariato qualche elemento essenziale di questi sistemi; per es. alcune proprietà caratteristiche del mezzo in cui avvengono i fenomeni, o del fluido su cui galleggiano i corpi simili, ecc. Tali sistemi dovranno essere considerati in numero infinito, quando si tratti di stabilire leggi generali e in numero limitato, quando si tratti invece di stabilire le norme per dedurre poi sperimentalmente qualche legge pratica.

Consideriamo ora partitamente i metodi particolari di queste due categorie.

2. Quando le condizioni fisiche sono tali che non occorra porre alcun vincolo ai rapporti di similitudine, le applicazioni avvengono ordinariamente secondo due metodi, che si potrebbero opportunamente distinguere, come qualche volta fanno i fisici inglesi, colle denominazioni di *metodo delle dimensioni* e di *metodo della similitudine*.

Il primo applica più direttamente la nozione dell'omogeneità delle equazioni e riconduce il problema della ricerca delle relazioni fra diverse entità fisiche, che rimangono invariate passando da un sistema ad un altro simile, a quello della ricerca dei prodotti delle potenze di tali entità che non abbiano dimensioni fisiche, o che, come si dice comunemente, siano di dimensioni nulle. Per fissare le idee, ricordiamo il noto esempio della deduzione dell'equazione del pendolo dalla considerazione che i soli prodotti di dimensioni fisiche nulle, della forma $t\,l^{\alpha}\,g^{\beta}$, ove t indica un tempo, l una lunghezza e g un'accelerazione, sono rappresentati dal prodotto $t\,l^{-\frac{1}{2}}\,g^{\frac{1}{2}}$ e dalle sue potenze, per modo che la legge del pendolo, che appunto esprime una relazione fra le entità t, l e g, non può essere che la nota legge

$$t = \text{Cost. numerica}\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

Il secondo applica più direttamente la nozione di similitudine, ponendo senz'altro l'equazione che esprime l'invarianza delle relazioni fra certe entità fisiche al passare da un sistema ad un altro sistema simile. Nel caso del pendolo, per es., si pone l'equazione funzionale

$$f(t\,,l\,,g) = f(t'\,,l'\,,g') = 0\,,$$

che, per le formule di trasformazione (3) della Nota precedente, diviene

$$f(t\,,l\,,g) = f(\tau t\,,\lambda l\,,\lambda\tau^{-2} g)\,,$$

la quale ammette appunto per la f solamente la determinazione corrispondente alla legge del pendolo.

Questi due metodi, dei quali manca tuttora una trattazione completa e sistematica, sono sempre applicabili quando si conoscano *a priori* le dimensioni di tutte le entità fisiche e di tutte le costanti dimensionali (universali o individuali) che possono intervenire. Furono perciò applicati ampiamente e senza incertezze nelle questioni riguardanti la dinamica, ma scarsamente e con molte riserve nelle questioni della fisica, ove è inevitabile l'intervento delle costanti universali, delle quali la nostra conoscenza è assai limitata.

Osserviamo fin d'ora che se noi potremo affermare che tutte le possibili costanti universali di una data teoria debbano essere esprimibili mediante un numero limitato di costanti universali fondamentali, oppure anche solamente avere le loro dimensioni sottoposte ad un determinato vincolo, i due metodi precedenti diverranno senz'altro applicabili in generale a quella stessa teoria fisica, purchè si tenga conto del possibile, eventuale intervento di tali costanti.

3. Passiamo ora al caso in cui convenga per qualche ragione sottoporre i rapporti fondamentali di similitudine a qualche vincolo.

Opportune limitazioni nei rapporti di similitudine sono considerate esplicitamente e di proposito deliberato, quando si tratta di realizzare effettivamente qualche sistema simile su cui esperimentare, valendosi dei soli mezzi che è possibile avere a nostra disposizione. Si comprende che le difficoltà sono allora gravissime, perchè, mentre si può disporre di limitati rapporti di similitudine, le diverse proprietà fisiche dei corpi e le loro influenze sulle esperienze sono invece numerosissime. Non può quindi sorprendere che, mancando anche di questo argomento una trattazione sistematica, quasi ogni applicazione abbia dato luogo a critiche e discussioni. Lasciamo quindi per ora da parte quest' ultima classe di applicazioni.

Però ricordiamo fin d'ora che, trattando questioni fisiche, sono state qualche volta introdotte limitazioni nei rapporti di similitudine, anche quando non si trattava di realizzare effettivamente qualche determinato sistema simile, ma si voleva solamente limitare la considerazione astratta dei sistemi simili a quelli che possono concepirsi nell'àmbito di una determinata teoria, per es. nell'etere interpretato secondo la teoria di Maxwell.

Si giungeva così a particolari forme di applicazione del principio di similitudine specialmente convenienti per alcune date teorie.

Ma il fatto che tali limitazioni nei rapporti di similitudine venivano generalmente giustificate con ragionamenti di altra indole, ha indotta l'errata convinzione che possa esistere un principio di similitudine, avente un valore effettivamente fisico e non puramente metodologico. Invece esso, nella sua forma generale, non ha, e non può avere, alcun rapporto con nessuna speciale teoria fisica, ma solamente col sistema delle dimensioni che è stato scelto. Nelle sue forme particolari, coi diversi rapporti sottoposti a vincoli più o meno ristretti, esso non è che l'espressione di ciò che diverrebbe il principio generale, quando lo si sottoponesse alla condizione di dover lasciare invariate, per qualsiasi possibile trasformazione, alcune date espressioni dimensionali. È quindi evidente che, *quando si potesse affermare* che le costanti universali, di una data teoria debbano soddisfare a una certa espressione dimensionale, la forma particolare del principio di similitudine che lascierà sempre invariata tale espressione potrà rendere ottimi servigi, permettendo essa di eliminare senz'altro la difficoltà, ripetutamente rilevata, dell'eventuale intervento, nelle nostre formole, delle costanti universali, e ciò senza doverle considerare esplicitamente ogni volta, come si dovrebbe nel caso del n.° 2.

Vedremo in una Nota seguente come, per es. il Principio della similitudine del Tolmann, sia appunto una praticissima forma di applicazione del principio generale, nell'ipotesi che esso abbia sempre a considerare solamente costanti universali sottoposte a un certo vincolo; e che quindi questo principio avrà un notevole valore, quando sarà dimostrato, ciò che dall'esposizione di esso non risulta, che quel vincolo corrisponde appunto, anzi è equivalente, all'interpretazione dei fenomeni fisici mediante i principî della termodinamica e della elettrodinamica di Maxwell.

Ma vedremo pure che potremo far corrispondere a qualsiasi teoria logica, sia essa o no confermata dalla nostra esperienza, per es. alla teoria dell'emissione della luce, principî di similitudine perfettamente analoghi.

Perchè quanto precede abbia una base è però necessario di ammettere, come abbiamo ripetutamente accennato, una stretta correlazione fra teorie fisiche e costanti universali. Essa risulta, infatti, da un mio studio in corso di pubblicazione e che riassumerò brevissimamente nel paragrafo seguente.

Relazioni generali fra teorie fisiche e costanti universali.

4. Le dimensioni di una costante dimensionale della fisica possono venire espresse per mezzo delle dimensioni di un certo numero di altre costanti, che perciò assumerebbero il carattete di costanti fondamentali. Posto a base il sistema di dimensioni l, t, m, T ed e della Nota precedente, le dimensioni di una generica costante possono in generale essere espresse mediante l'equazione dimensionale:

$$[l^{\lambda}\, t^{\tau}\, m^{\mu}\, \mathrm{T}^{\varpi}\, e^{\eta}] = \left[\prod_{i=1}^{i=5} (l^{\lambda_i}\, t^{\tau_i}\, m^{\mu_i}\, \mathrm{T}^{\varpi_i}\, e^{\eta_i})^{\alpha_i}\right], \tag{1}$$

quando le costanti fondamentali ($l^{\lambda_i}\, t^{\tau_i}\, m^{\mu_i}\, \mathrm{T}^{\varpi_i}\, e^{\eta_i}$) soddisfacciano a certe condizioni algebriche che non è difficile stabilire.

Ciò premesso, se ci chiediamo se sia ammissibile che costanti universali, soddisfacenti a quelle condizioni, possano appartenere tutte ad una data interpretazione fisica (costituita da una o più teorie concordanti fra di loro), dobbiamo rispondere in modo recisamente negativo. Tale ammissione, infatti, toglierebbe alle teorie fisiche il loro carattere essenziale, di poter ammettere certe leggi e di non poter ammetterne certe altre, perchè sarebbe allora sempre possibile di comporre, per mezzo di quelle costanti fondamentali, altre costanti universali di dimensioni tali, da rendere logicamente possibile qualsiasi legge arbitrariamente data. Per es. finchè ammettiamo, che le dimensioni di tutte le costanti universali C, che possono intervenire eventualmente nella teoria di Maxwell, debbano tutte essere esprimibili mediante le dimensioni di due di esse (per. es. della costante dielettrica ε e della permeabilità magnetica μ, oppure di una delle due e della velocità della luce c), le note relazioni fra la densità dell'energia elettrica u_e e magnetica u_m e le rispettive forze elettriche E e magnetiche H in un punto qualsiasi vuoto

$$u_e = C_1 E^2 \qquad e \qquad u_m = C_2 H^2$$

saranno caratteristiche per la detta teoria, come le sole relazioni logicamente possibili, in essa, fra le u ed E da una parte, le u ed H dall'altra ed una generica costante C. Ma se togliessimo, o modificassimo, questo vincolo relativo alla C, ed ammettessimo la possibilità dell'intervento, nell'espressione delle loro dimensioni, sia pure di una sola costante fondamentale di dimensioni indipendenti da quella delle due altre già scelte, fra le stesse entità u, E ed H diverrebbero immediatamente possibili infinite altre relazioni, altrettanto logiche che le precedenti.

Se poi, procedendo in quest'ordine di idee, ricerchiamo a quali vincoli debbano essere sottoposte le dimensioni delle costanti universali di una data teoria, perchè possa essere evitato l'inconveniente anzidetto, repugnante ad ogni nostra concezione di teoria fisica, potremo concludere che basterà ammettere, che esse debbano soddisfare a k equazioni lineari fra le $\lambda, \tau, \mu, \vartheta$ ed η, k essendo sempre minore di 5.

Ciò appunto si verifica in tutte le teorie logicamente possibili.

Ma quello che più interessa è, che è possibile di dimostrare come questo vincolo sia caratteristico per la teoria, tanto che la sua semplice ammissione equivale ad ammettere tutte le leggi fondamentali della teoria stessa.

E così nella teoria elettrodinamica di Maxwell le costanti sono sottoposte al vincolo di soddisfare alle equazioni lineari

$$(2) \qquad 2\lambda + 2\tau + \eta = 0 \qquad e \qquad \mu - \lambda - \tau = 0\,;$$

e reciprocamente, l'ammissione di tale vincolo basta a dedurre tutte le leggi di quella teoria.

Nella teoria dell'irraggiamento termico, fondata sulla teoria di Maxwell e sui principî della termodinamica, il vincolo può essere espresso colla sola equazione

$$(3) \qquad \lambda + \tau - \mu - \vartheta = 0\,,$$

dalla cui sola ammissione si possono ricavare tutte le leggi fondamentali di quella teoria.

La teoria dell'irraggiamento, invece, che si potrebbe logicamente fondare sulla teoria dell'emissione e sulla termodinamica (e che è talvolta molto istruttivo di paragonare colla teoria ora ammessa, nello stesso modo che è talora utile paragonare colla nostra la geometria non euclidea) è tutta contenuta nell'ammissione che il vincolo in questione sia dato dall'equazione

$$\lambda + \tau - 2\mu - 2\vartheta = 0\,. \tag{4}$$

L'ipotesi del paragrafo precedente, che fra le dimensioni delle costanti di una data teoria debba esistere un vincolo, corrisponde quindi alla realtà e di essa ci varremo per sviluppare, nella Nota seguente, le diverse forme di applicazione del principio della similitudine.

Geologia. — *Sul riconoscimento nelle regioni italiane dell'eocene autoctono.* Nota di G. Rovereto, presentata dal Corrisp. Arturo Issel.

Ho accennato, nelle Note precedenti, a varie condizioni, le quali sono risultate estese a gran parte degli Appennini, e che dimostrano come la serie eocenica, per quasi tutta la sua estensione, faccia parte delle falde di ricoprimento. Ora occorre stabilire, come si possano riconoscere le zone in cui l'eocene non è compreso in tali falde, ed è per questo *autoctono*. Le osservazioni che seguono non portano a dettami generali, ma solo alla soluzione di alcuni casi.

Quando riuscii a dimostrare (1), che il calcare triassico di Monte Gazzo, lungo la nota *zona di coincidenza* fra eocene e mesozoico, ambedue ofiolitici, della Liguria occidentale, è la *cerniera* di una falda di ricoprimento, raddrizzata a forma di anticlinale, posi anche la questione, lasciata da me in parte insoluta, dei rapporti dell'eocene con tale falda mesozoica. Chi esaminò, o riprese, le mie ricerche, venne a due conclusioni opposte, e non affatto accettabili: il Termier e il Boussac (2) vollero che il creduto eocene sia una *facies*, a differente metamorfismo, dei calcescisti mesozoici; il De Stefani (3) assicurò che questi calcescisti sono una *facies* degli scisti eocenici.

La soluzione che ora propongo abbraccia cognizioni antiche e constatazioni nuove, ed è la seguente: lungo la zona di coincidenza l'eocene è autoctono, e la zona mesozoica, a falde di ricoprimento, deve essere considerata, rispetto a esso, come un massiccio di corrugamento anteriore.

(1) Boll. Soc. Geol. Ital., vol. XXVIII (1909).
(2) C. R. Acad des Sc., vol. 152, pag. 1361 (1911).
(3) Rend. Accad. Lincei, vol. XXII, serie 5a. 1° sem. (1913).