ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 dicembre 1917.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani. I: Generalità e prima approssimazione.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

La questione che è oggetto della presente Nota e di alcune altre che le faranno seguito si imposta fisicamente così:

Una regione dello spazio è sede di un campo di forza — nell'ordinaria meccanica si direbbe senz'altro newtoniano — dovuto all'azione di masse esterne al campo. Supposto che le masse non si spostino e che non intervenga nessun'altra circostanza perturbatrice, si stabilisce — pur valendo la nuova meccanica di Einstein — un regime statico, poco diverso da quello che risponde alla tradizione classica, le condizioni di equilibrio dovendosi desumere dalle equazioni gravitazionali di Einstein. Il nostro scopo è appunto di discutere le principali conseguenze di codeste equazioni nel caso semplice testè specificato.

Dacchè il divario quantitativo dallo schema abituale è appena sensibile alle più affinate esperienze, siamo intuitivamente tratti a presumere che ad ogni ordinario potenziale newtoniano si coordini una soluzione dell'anzidetto sistema differenziale, sicchè il grado di arbitrarietà del suo integrale generale sarà quello stesso delle funzioni armoniche. Ciò si mette in evidenza, direi quasi automaticamente, quando, nella trattazione delle equazioni differenziali, ci si limita ad una prima approssimazione. Il potenziale newtoniano $-c^2\gamma$ (c costante universale ben nota) conserva allora, nei riguardi statici, il suo significato ordinario (vuoi di lavoro, vuoi, cambiando il segno, di energia posizionale di un ipotetico punto materiale mobile nel campo); e la metrica dello spazio ambiente subisce soltanto una alterazione conforme (rispetto alla metrica euclidea che vige in assenza del campo), di modulo $1-\gamma$ assai prossimo all'unità, avendosi l'elemento lineare

$$dl = (1-\gamma)\, dl_0 ,$$

con dl_0 euclideo.

In questa prima Nota, prendo anzitutto occasione dai richiami preliminari [nn. 1 e 2] per una osservazione meccanica di carattere generale; ed è che, nella statica di Einstein, seguitano bensì a sussistere le consuete nozioni elementari di funzione delle forze (entro un campo conservativo) e di energia posizionale (di un punto materiale mobile nel campo), ma sono in generale distinte. Soltanto in prima approssimazione, una è l'opposta dell'altra, a meno di una inessenziale costante additiva, come nella meccanica ordinaria.

Scritte poi [n. 3] le equazioni fondamentali, mi occupo qui esclusivamente della loro integrazione approssimata [nn. 4-8] col risultamento già indicato.

Rimetto alle Note successive lo studio rigoroso del sistema differenziale. Nella prossima comunicazione ricaverò le condizioni di integrabilità illustrandole sotto l'aspetto geometrico.

1. — Richiami concernenti il moto di un punto materiale in campo statico.

Sia S una porzione qualsivoglia dello spazio fisico;

$$dl^2 = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{1}$$

l'espressione del quadrato dell'elemento lineare, e V la velocità della luce in un generico punto P di S.

L'ipotesi che la forma quaternaria fondamentale della teoria di Einstein sia esente da termini rettangoli in dt, ossia del tipo

$$ds^2 = V^2\, dt^2 - dl^2 , \tag{2}$$

e che i coefficienti V^2, a_{ik} siano funzioni del posto P (cioè delle coordinate x_1, x_2, x_3), *indipendenti da* t, traduce matematicamente la limitazione a fenomeni di carattere statico.

Il moto di un punto materiale (supponendo al solito che si possa prescindere da ogni sua azione sul campo) è retto dalla equazione variazionale

$$\delta \int ds = 0 .$$

Posto per brevità

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$v^2 = \frac{dl^2}{dt^2} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k\,, \quad L = c\left|\sqrt{V^2 - v^2}\right|,$$

con c costante *a priori* arbitraria, se ne traggono le equivalenti equazioni di Lagrange [1]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Dacchè L non contiene esplicitamente t, esse ammettono il ben noto integrale

$$L - \sum_{1}^{3}{}_{i} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\, \dot{x}_i = E \qquad (\text{E costante}), \tag{4}$$

che esprime il principio di conservazione dell'energia. Infatti la funzione della posizione e della velocità del mobile, che sta nel primo membro e che mantiene valore invariato durante il movimento, può interpretarsi come energia (per unità di massa) del mobile stesso: basta attribuire alla costante c il valore, diciamo canonico, della velocità della luce in assenza di ogni azione perturbatrice, e prender norma dal caso elementare ($V = c$ e dl euclideo) [2].

Osservazione. — Nella citata mia Nota sulla statica einsteiniana avevo adottato per L la determinazione $\left|\sqrt{V^2 - v^2}\right|$ (senza l'inessenziale fattore c), con che le dimensioni di L erano quelle di una velocità. Lo stesso avvenendo per il primo membro del corrispondente integrale, questo risultava soltanto proporzionale all'energia unitaria del mobile. Coll'attuale L, il primo membro di (4) rappresenta proprio la detta energia.

2. — Significato meccanico della funzione $-\frac{1}{2}V^2$.

Se ad un dato istante si annulla la velocità del mobile, cioè ognuna delle $\dot{x}_i$ (caso del moto incipiente a partire dalla quiete), si ha in particolare dalle (3)

$$\sum_{1}^{3}{}_{k}\, a_{ik}\, \ddot{x}_k = -\frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{5}$$

[1] Cfr. la Nota *Statica einsteiniana*, in questi Rendiconti, vol. XXVI (1° sem. 1917), pag. 465.

[2] Cfr. A. Palatini, *Lo spostamento del perielio di Mercurio e la deviazione dei raggi luminosi secondo la teoria di Einstein*, Nuovo Cimento, serie VI, vol. XIV, 1917, pag. 40.

le quali definiscono le $\ddot{x}_i$ (i due punti sovrapposti significando, ben s'intende, duplice derivazione rapporto a t) in funzione del posto. I secondi membri

$$X_i = -\tfrac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial x_i} \tag{6}$$

(in quanto derivate di una medesima funzione $-\frac{1}{2}V^2$) costituiscono manifestamente un sistema covariante (di fronte a trasformazioni qualsivogliono di coordinate spaziali). Il sistema contravariante reciproco è

$$X^{(i)} = \sum_1^3{}_k\, a^{(ik)} X_k ,$$

designandosi al solito con $a^{(ik)}$ i coefficienti della quadrica reciproca al dl^2.

La risoluzione delle (5) porge precisamente

$$\ddot{x}_i = X^{(i)} ,$$

mettendo in evidenza il carattere contravariante delle accelerazioni incipienti: voglio dire delle $\ddot{x}_i$ spettanti ad un punto materiale in campo statico, quando si assumono tutte le $\dot{x}_i$ eguali a zero.

Ai due sistemi semplici reciproci X_i, $X^{(i)} = \ddot{x}_i$ si coordina notoriamente ([1]) un unico vettore **F** (dello spazio euclideo tangente, col quale del resto si identifica qualunque varietà nell'intorno di prim'ordine di un suo punto generico).

Tale vettore **F** *porge ovviamente la misura statica della forza* (unitaria) *del campo* (accelerazione incipiente di un punto materiale libero, o, se si vuole, accelerazione che è d'uopo vincere per mantenere il punto in quiete).

Consideriamo, accanto al punto P di coordinate x_i, un punto vicinissimo P′ di coordinate $x_i + dx_i$ e il trinomio (invariante)

$$\sum_1^3{}_i\, X_i\, dx_i = -\tfrac{1}{2} dV^2 .$$

Indicando con dl l'elemento lineare PP′, $-\frac{1}{2}\frac{dV^2}{dl}$ si presenta come derivata (in P) della funzione $-\frac{1}{2}V^2$ secondo l'arco (di una qualsiasi linea) uscente da P verso P′. D'altra parte i rapporti $\frac{dx_i}{dl}$ sono i parametri spet-

([1]) Ricci et Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu*, etc., Math. Ann., B. LIV, 1900, pag. 137.

tanti alla direzione PP′, e la proiezione ortogonale (col debito segno) del vettore **F** secondo tale direzione è espressa dall'invariante

$$\sum_1^3{}_i X_i \frac{dx_i}{dl} = -\tfrac{1}{2}\frac{dV^2}{dl}.$$

Perciò, definendo il lavoro elementare di **F** relativo allo spostamento PP′, come nell'ordinario spazio euclideo, quale prodotto dello spostamento per la proiezione ortogonale della forza, l'identità

$$-\tfrac{1}{2}\frac{dV^2}{dl}\,dl = -\tfrac{1}{2}\,dV^2$$

mostra che $-\frac{1}{2}V^2$ *costituisce la funzione potenziale della forza che si esercita nel campo in condizioni statiche.*

Vale la pena di rilevare che, mentre nell'ordinaria meccanica questa funzione potenziale, cambiata di segno, si può anche interpretare come una energia di posizione spettante al punto mobile, ciò in generale non avviene nella teoria di Einstein. Infatti dalla (4), quando la velocità si annulla, si ha la parte intrinseca (cioè costante) e posizionale dell'energia del mobile complessivamente espressa da cV, che non coincide con $\frac{1}{2}V^2$, nemmeno a prescindere da una costante additiva (inessenziale, rispetto alla funzione potenziale $-\frac{1}{2}V^2$). Le due espressioni cV e $\frac{1}{2}V^2$ hanno differenza costante soltanto in prima approssimazione, quando cioè il divario di V dal valore costante c è abbastanza piccolo perchè, ponendo $V = c(1+\gamma)$, sia lecito risguardare γ come una quantità (numero puro) di prim'ordine. Si ha allora

$$cV = c^2(1+\gamma) \quad , \quad \tfrac{1}{2}V^2 = \tfrac{1}{2}c^2(1+2\gamma),$$

che differiscono per $\frac{1}{2}c^2$.

3. — Campi vuoti – Equazioni indefinite.

Supponiamo che la porzione S di spazio a cui si riferiscono le nostre considerazioni sia completamente vuota, abbia cioè densità di energia (e quindi di materia) ovunque nulla. Supponiamo inoltre che entro S siano ovunque nulli gli sforzi specifici. In tali condizioni si annullano evidentemente, in ogni punto di S, tutti gli elementi del tensore energetico (sforzi, densità e flusso di energia).

Il ds^2 einsteiniano (e con esso il dl^2 spaziale) sarebbe rigorosamente euclideo, qualora il tensore suddetto fosse zero in *tutto* lo spazio [1]. Noi

[1] L'affermazione è intuitiva sotto l'aspetto fisico, rispecchiando, si può dire, il punto di partenza della costruzione speculativa di Einstein. Dal punto di vista matema-

ci proponiamo più generalmente di indagare le limitazioni che derivano dal semplice annullamento *locale* (in una porzione finita S di spazio).

Le equazioni indefinite che vanno all'uopo discusse sono manifestamente quelle della statica einsteiniana, coi secondi membri eguali a zero (per essere nullo il tensore energetico), cioè le sette seguenti [1]:

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{M} = 0 ,$$

$$\text{(II)} \qquad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} = 0 \qquad (i , k = 1 , 2 , 3).$$

In queste si considera come fondamentale il dl^2 spaziale (anzichè il ds^2 quadridimensionale di Einstein): le α_{ik} sono i simboli di Ricci (che sostituiscono con vantaggio quelli di Riemann per le forme ternarie);

$$\mathfrak{M} = \sum\nolimits_{1}^{} {}_{ik}\, a^{(ik)} \alpha_{ik}$$

è la curvatura media dello spazio. Essendo notoriamente

$$\Delta_2 V = \sum_{1\ ik}^{3} a^{(ik)} V_{ik} ,$$

la (I), in virtù delle (II), equivale alla condizione di armonicità

$$\text{(I')} \qquad \Delta_2 V = 0 .$$

4. — Prima approssimazione. Conseguente linearità del sistema differenziale.

Se si suppone che l'espressione (1) del ds^2 sia molto prossima al tipo euclideo riferito a coordinate cartesiane di spazio

$$c^2 dt^2 - \sum_{1}^{3}{}_i \, dx_i^2 ,$$

giova porre, assieme a

$$\text{(5)} \qquad V = c(1 + \gamma) ,$$

$$\text{(6)} \qquad a_{ik} = \varepsilon_{ik} + e_{ik} \qquad (i , k = 1 , 2 , 3),$$

---

tico si richiederebbe invece una dimostrazione rigorosa in base alle equazioni che racchiudono oramai tutta la teoria. Non mi consta che tale dimostrazione sia stata data, e mi permetto di segnalarlo, osservando che il teorema in questione si riduce, nel caso limite della meccanica ordinaria, alla costanza d'ogni funzione armonica regolare in tutto lo spazio.

[1] Pag. 464 della già citata Nota, *Statica einsteiniana.*

col solito significato dei simboli ε_{ik} (0 per $i \neq k$ e 1 per $i = k$). Si ha così

$$(6') \qquad dl^2 = \sum_1^3{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k = dl_0^2 + \sum_1^3{}_{ik}\, e_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

dove dl_0^2 è l'elemento lineare dell'ordinario spazio euclideo riferito a coordinate cartesiane.

Le e_{ik} sono puri numeri al pari della γ, e il supposto comportamento qualitativo del ds^2 equivale, in prima approssimazione, a trattare come infinitesime tutte queste sette quantità.

I simboli di Riemann $a_{ij,hk}$ relativi alla forma (6') [e quindi ai coefficienti (6)] si riducono in conformità a (¹)

$$a_{ij,hk} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 e_{jh}}{\partial x_i\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 e_{ik}}{\partial x_j\, \partial x_h} - \frac{\partial^2 e_{ih}}{\partial x_j\, \partial x_k} - \frac{\partial^2 e_{jk}}{\partial x_i\, \partial x_h}\right) \quad (i\,,j\,,h,\,k = 1\,,2\,,3).$$

Dacchè, a meno di termini di prim'ordine, le $a^{(jh)}$ conservano i valori euclidei ε_{jh}, ne consegue

$$\mathrm{G}_{ik} = \sum_1^3{}_{jh}\, a^{(jh)}\, a_{ij,hk} = \sum_1^3{}_j\, a_{ij,jk} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\sum_1^3{}_j \left(\frac{\partial^2 e_{jj}}{\partial x_i\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 e_{ik}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial x_j\, \partial x_k} - \frac{\partial^2 e_{jk}}{\partial x_i\, \partial x_j}\right).$$

In generale le G_{ik} sono legate alle α_{ik} di Ricci dalle relazioni [(14) della Nota *Statica einsteiniana*, già due volte citata]

$$\alpha_{ik} = \mathrm{G}_{ik} + \mathfrak{M}\, a_{ik}.$$

Coll'espressione delle G_{ik} testè ricavata, dato che, nel caso presente, $\mathfrak{M} = 0$ a norma della (I), risulta

$$(7) \qquad \alpha_{ik} = \tfrac{1}{2}\sum_1^3{}_j \left(\frac{\partial^2 e_{jj}}{\partial x_i\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 e_{ik}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 e_{ij}}{\partial x_j\, \partial x_k} - \frac{\partial^2 e_{jk}}{\partial x_i\, \partial x_j}\right).$$

La determinazione delle incognite $\gamma\,, e_{ik}$ va desunta dalle (I), (II), o, se si vuole, dalle equivalenti (I'), (II).

Importa rilevare che, a meno di termini d'ordine superiore al primo (nelle $\gamma\,, e_{ik}$), le derivate covarianti V_{ik} di $\mathrm{V} = c(1+\gamma)$ rispetto alla forma (6') coincidono colle corrispondenti derivate ordinarie di $c\gamma$. Con ciò

$$\Delta_2 \mathrm{V} = c\, \Delta_2^0 \gamma\,,$$

rappresentando Δ_2^0 l'ordinario parametro differenziale di 2° ordine relativo

(¹) Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I [Pisa, Spoerri, 1902], pag. 73; oppure Ricci et Levi-Civita, loc. cit., pag. 142.

al dl_0^2, cioè l'operatore $\sum_1^3 {}_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Le (I'), (II) possono quindi scriversi

$$\Delta_2^0 \gamma = 0 , \tag{8}$$

$$\alpha_{ik} = - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_i \, \partial x_k} \qquad (i , k = 1 , 2 , 3), \tag{9}$$

dove le α_{ik} sono le combinazioni lineari (differenziali del 2° ordine) (7) delle incognite e_{ik}.

5. — Isolamento del problema statico.

Ricordando dal n. 2 che $-\frac{1}{2} V^2$, o, ciò che è lo stesso, $-\frac{1}{2}(V^2 - c^2) = - c^2 \gamma$ costituisce *il potenziale* (statico) *del campo*, appare dalla (8) che questo (come nella teoria classica dell'attrazione newtoniana all'esterno dell'agente) *è sottoposto alla restrizione di essere funzione armonica, nonchè, ben si intende, regolare nel campo*. Il campo stesso — data la forma della (8) — si comporta, nei riguardi della legge di variazione del potenziale, come se fosse euclideo e riferito a coordinate cartesiane.

Le (9) — lo accerteremo tra un momento — non implicano alcun ulteriore vincolo per la funzione γ; quindi, *inversamente, ogni γ armonica e regolare in* S *dà luogo ad un campo possibile*. Ciò è perfettamente conforme allo schema ordinario, secondo cui il gradiente d'ogni funzione armonica e regolare in un campo può essere (in infiniti modi) realizzato mediante l'attrazione di masse esterne al campo.

6. — Il problema geometrico – Soluzione particolare.

Venendo oramai alle (9), si nota in primo luogo che una soluzione particolare si ha prendendo

$$e_{ik} = - 2 \varepsilon_{ik} \gamma \qquad (i , k = 1 , 2 , 3). \tag{10}$$

La verificazione è immediata, attesa l'espressione (7) delle α_{ik} e l'armonicità della γ.

Siccome poi le (3) stesse costituiscono un sistema lineare, non omogeneo, nelle e, l'integrale generale si ha senz'altro componendo (per via di somma) la soluzione (10) con la soluzione più generale delle equazioni prive di secondo membro

$$\alpha_{ik} = 0 .$$

Dacchè γ non interviene più, è provata l'affermazione del n. prec. circa l'isolamento del problema statico.

L'integrale generale del sistema $\alpha_{ik} = 0$ è ben noto; ma, come si preciserà qui appresso, non ha per noi importanza, corrispondendo soltanto a cambiamenti delle coordinate di riferimento.

7. — CARATTERE INESSENZIALE DELL'ARBITRARIETÀ FORMALMENTE SPETTANTE ALL'INTEGRALE GENERALE.

L'annullarsi delle α_{ik} esprime (rigorosamente, non soltanto nel nostro ordine di approssimazione) la condizione necessaria e sufficiente perchè il corrispondente dl^2 (ternario) sia euclideo, ossia riducibile con acconcia scelta di parametri alla forma $\sum_1^3{}_i\, dy_i^2$. Perciò, dette genericamente x_1, x_2, x_3 le coordinate di riferimento, la maniera più generale di definire un dl^2 euclideo, rispetto a tali coordinate x, si ha manifestamente introducendo una qualunque trasformazione fra le y e le x,

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

e prendendo per coefficienti a_{ik} quelli che risultano dall'esprimere $\sum_1^3{}_i\, dy_i^2$ mediante i differenziali delle x. Assumendo, come è sempre lecito, le funzioni $y_i(x_1, x_2, x_3)$ sotto la forma

$$x_i + \xi_i(x_1, x_2, x_3),$$

si ha $\left(\text{per materiale introduzione dei corrispondenti differenziali nel trinomio } \sum_1^3{}_i\, dy_i^2\right)$

$$dl^2 = \sum_1^3{}_{ik}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

con

$$a_{ik} = \varepsilon_{ik} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right) + \sum_1^3{}_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}.$$

Per rispecchiare la limitazione al prim'ordine delle differenze $a_{ik} - \varepsilon_{ik}$, colla specificazione ulteriore che sia dello stesso ordine il divario fra il reticolato cartesiano delle y e quello (curvilineo) delle x [1], basta (e occorre)

[1] In difetto di tale specificazione, si esige soltanto che risultino infinitesime le sei quantità (numeriche)

$$e_{ik} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right) + \sum_1^3{}_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k},$$

e ciò può ottenersi, come ha mostrato il prof. Almansi [*L'ordinaria teoria dell'elasticità e la teoria delle deformazioni finite*, in questi Rendiconti, vol. XXVI (2° sem. 1917), pp. 3-8], anche senza che sieno infinitesime le stesse ξ.

poter trattare come infinitesime le funzioni ξ (assieme alle loro derivate). Ne risulta

$$e_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\right), \tag{11}$$

che costituisce l'espressione formale dell'integrale generale del sistema omogeneo $\alpha_{ik} = 0$ [le α_{ik} dipendendo linearmente dalle e, a norma delle (7)].

Ma non è questa espressione formale che importa ritenere, sibbene la circostanza che il termine (11) [da aggiungere a (10) per avere l'integrale generale del sistema (9) a secondi membri non nulli] si può sempre rendere eguale a zero mediante opportuno cambiamento di coordinate: sostituendo cioè alle x le combinazioni

$$y_i = x_i + \xi_i(x_1, x_2, x_3), \tag{12}$$

con che l'espressione del dl^2 si riduce, per costruzione, a $\sum_1^3{}_i\, dy_i^2$, annullandosi tutte le differenze $a_{ik} - \varepsilon_{ik}$.

Scelte per variabili le y, si deve naturalmente far subire la trasformazione (12) anche alla soluzione particolare (10). Ma la (12) — dovendosi risguardare le ξ infinitesime al pari di γ — si riduce, nei riguardi della (10), alla materiale sostituzione delle y alle x. Rimane perciò inalterata, anche riferendosi alle y, la espressione (11) della soluzione particolare che sola ci interessa.

Si noti inoltre che rimane egualmente inalterata la forma elementare (somma delle derivate seconde) del parametro $\Delta_2^0 \gamma$.

8. — Forma canonica del ds^2.

Si raccoglie da quanto precede che, *entro un campo vuoto, al potenziale statico* (in prima approssimazione newtoniano) $-c^2\gamma$ *si collega una alterazione metrica dello spazio ambiente. Scelte opportunamente le coordinate di riferimento* (le y del n. prec., che qui indicheremo con x) γ *può ritenersi soluzione* (a priori qualunque, purchè regolare nel campo) *dell'equazione di Laplace*

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x_3^2} = 0\,;$$

ai coefficienti a_{ik} del quadrato dell'elemento lineare competono (colla stessa approssimazione) le espressioni $a_{ik} - 2\varepsilon_{ik}\gamma$, con che

$$dl^2 = (1 - 2\gamma)\,(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2).$$

Come si vede, lo spazio non resta in generale euclideo, nemmeno in prima approssimazione, ma è soltanto (in tale approssimazione) rappresentabile conformemente entro uno spazio euclideo.

In definitiva, il ds^2 *globale di Einstein che conviene ad un assegnato campo di forza newtoniano di potenziale* $-c^2\gamma$ *è dato da*

$$ds^2 = c^2(1+2\gamma)\,dt^2 - (1-2\gamma)\,dl_0^2 \tag{13}$$

(dl_0 elemento lineare di uno spazio euclideo).

Per il campo di un'unica massa ($-c^2\gamma$ proporzionale all'inversa della distanza dalla massa), l'espressione (13) del ds^2 era già stata esplicitamente segnalata da De Sitter [1]. Il caso di quante si vogliono masse (che corrisponde sostanzialmente ad una arbitraria funzione armonica γ) è poi implicito in una notevole formula di seconda approssimazione stabilita da J. Droste [2]. Con tutto cio mi è parso opportuno, proponendomi una ricerca sistematica sugli spazi vuoti, di far posto anche a questi risultati di prima approssimazione, tanto più che vengono così meglio lumeggiati, e si ottengono nel modo più spontaneo senza sviluppi materiali di calcolo.

Paletnologia. — *Ancora la Grotta preistorica di Equi.* Nota del Socio Carlo De Stefani.

Avendo continuato nel 1917 gli scavi da lungo tempo intrapresi nella Grotta preistorica di Equi nelle Alpi Apuane della quale detti un Resoconto all'Accademia (Rendiconti del luglio 1916) e che illustrai a lungo di recente [3], do un nuovo cenno delle ulteriori scoperte.

A metri 1,30 verticalmente sotto il focolare descritto, e così a m. 5,10 sotto il piano del piazzale della Tecchia si trovò un altro focolare pianeggiante, più limitato, presso la parete sinistra della Grotta, non lontano dall'ingresso, quindi un poco indentro al pendio di pietrisco che la superficie della Grotta stessa aveva dall'esterno verso l'interno. Di questo focolare avevamo trovato appena qualche indizio negli scavi precedenti.

Colà il pietrisco è scarso, anzi scarsissimo e predomina la sabbia gialletta derivante dal lento e regolare sfacimento delle pareti silicifere.

[1] Cfr. Einstein, *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*, Sitzungsberichte der K. Preuss. Ak. der Wiss., 1916, pag. 692.

[2] *The field of n moving centres in Einstein's theory of gravitation*, K. Ak. van Wet. te Amsterdam, Proceedings, vol. XIX, 1916, pp. 447-455.

[3] *La grotta preistorica di Equi nelle Alpi Apuane* (Arch. per l'Antropologia e la Etnologia, vol. XLVI, 1916).