ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Matematica. — *Hamiltoniani e gradienti di hamiltoniani e di gradienti, laplassiani, parametri differenziali.* Nota II di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra.

Nella precedente Nota dal medesimo titolo, inserita in questi medesimi Rendiconti [1], e che nel seguito indicherò con (H di G., I), mi sono occupato di esaminare la forma ultima che conviene alle funzioni rappresentate in simboli da $\nabla_\Omega(G_\Omega U)$, $G_\Omega(\nabla_\Omega U)$ e $\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U)$; ma della terza con eccezione del caso in cui si abbia $2\varrho \leqq n+1$ [notazioni e definizioni restano qui le medesime di quelle adoperate in (H di G., I)] che, come ivi si disse, fu presentato senza tutte le conclusioni di cui è suscettibile. Ora, con la Nota presente mi occupo di colmare una tale lacuna e di trattare della funzione rappresentata dal simbolo $G_\Omega(G_\Omega U)$, l'ultima fra quelle enumerate in (H di G., I).

1. *a*) Riferendoci alla (14) della (H di G., I), cioè alla

$$(1) \qquad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega U) = 2\sum \frac{\partial^2 U}{\partial\omega_i\,\partial\omega_k}\,|\,E_i\,E_k \qquad (i\,,k=1\,,2\,,\dots,m\,;\,i<k)$$

per $2\varrho \leq n+1$, ovvero $\varrho \leq \varrho'$, troviamo che, nella espressione a 2° membro, sono nulli tutti i termini pei quali un E_i ha almeno un vertice della piramide di riferimento P in comune con E_k (il prodotto $E_i E_k$, per la supposizione fatta su ϱ, è progressivo); epperò, se, per ogni E_i, indichiamo con $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_\mu}$ $\mu = \binom{n+1-\varrho}{\varrho}$ i ϱ-*spigoli* della $(n+1-\varrho)$-piramide che risulta dalla P dopo averne tolto il ϱ *spigolo* E_i, avremo che saranno nulli i prodotti $E_i E_k$ per quali è $k \neq i_\nu$ $(\nu = 1\,,2\,,\dots,\mu)$ mentre che sarà $E_i E_{i_\nu} = E_{i_\nu} E_i$ per tutti i valori di ν. Perciò, ove fissato il posto che compete alla E_{i_ν} dell'ordinamento $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_\mu}$ nell'ordinamento $E_1, E_2, \dots, E_m$, si tenga ancora conto della condizione $i<k$, si avrà, nel caso in esame, per $\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U)$ l'espressione

$$(2) \qquad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega U) = 2\sum_{i=1}^{i=m}\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial\omega_i\,\partial\omega_{i_\nu}}\,|\,E_i\,E_{i_\nu}\,.$$

Questa abbraccia, evidentemente, $\frac{1}{2}m\mu$ termini siccome risulta dalle limitazioni dei due sommatori e dalla condizione $i<k(\equiv i_\nu)$; e tanti effetti-

[1] Fasc. 11°, 2° sem., 1917.

vamente devono essere poichè dalla (1) risultano in numero di $\frac{1}{2}m^2 = \frac{1}{2}\binom{n+1}{\varrho}^2$ i termini a secondo membro, e vi sono, per ogni *ϱ-spigolo* E_i della piramide P

$$\binom{\varrho}{r}\binom{n+1-\varrho}{\varrho-r}\ \varrho\text{-}\textit{spigoli} \text{ che hanno } r \text{ vertici comuni con } E_i$$

$$(r = 1, 2, \dots, \varrho);$$

per cui, essendo, in P, m il numero degli E_i vi saranno, nel 2° membro della (1), metà del numero $m^2 - m\sum_{r=1}^{r=\varrho}\binom{\varrho}{r}\binom{n+1-\varrho}{\varrho-r}$ dei termini che non sono nulli. Ma è noto essere

$$\binom{n+1}{\varrho} = \sum_{r=0}^{r=\varrho}\binom{\varrho}{r}\binom{n+1-\varrho}{\varrho-r},$$

dunque i termini che non sono nulli sono metà del numero

$$m^2 - m\left\{\binom{n+1}{\varrho} - \binom{n+1-\varrho}{\varrho}\right\} = m^2 - m(m-\mu) = m\mu\,.$$

Nel caso in cui si avesse proprio $2\varrho = n+1$, si avrebbe

$$\mu = 1\ ,\ E_i E_{i_1} = (-1)^{\xi_i},$$

dove ξ_i rappresenta il numero delle inversioni che gli indici dei vertici componenti il ϱ-spigolo E_i della piramide P fanno con gli indici di quelli che compongono il ϱ-spigolo E_{i_1} della stessa piramide. Ne segue, che, in tal caso, la formula (2) diventa

$$\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U) = \sum_{i=1}^{i=m}(-1)^{\xi_i}\frac{\partial^2 U}{\partial\omega_i\,\partial\omega_{i_1}}\,, \tag{3}$$

dove la sparizione del fattore 2 rimane giustificata dall'estensione del $\sum$.

Come rilevasi dal 2° membro della (3), il $\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U)$ è, nel caso in esame, una *funzione scalare*, e precisamente, per essere $\nabla_\Omega U$ di specie eguale alla Ω, è la *divergenza*, rispetto ad Ω, *dell'hamiltoniano della* U, rispetto alla Ω, però *supposta questa ordinata* non come la primitiva, ma, *in modo* che all'ordine $1, 2, \dots, m$ corrisponda l'ordine $1_1, 2_1, \dots, m_1$.

b) Alla formola (2) può essere data una forma più espressiva, introducendo l'hamiltoniano

$$\nabla_{\Omega_{r,\mu}} U = (-1)^{\varrho\varrho'}\left(\frac{\partial U}{\partial\omega_{r_1}}\,|\,E_{r_1} + \cdots\right) = \sum_{j=1}^{j=\mu}\frac{\partial U}{\partial\omega_{r_j}}\,|\,E_{r_j}\quad (r = 1, 2, \dots, \mu),$$

rispetto alla formazione $\Omega_{r_1\mu} = \omega_{r_1} E_1 + \omega_{r_2} E_2 + \cdots + \omega_{r_\mu} E_\mu$ *contenuta*, evidentemente, nella Ω; poichè allora si ha, al posto della (2), la seguente

$$(2') \qquad \nabla_\Omega(\nabla_\Omega U) = \sum_{r=1}^{r=m} \frac{\partial \nabla_{\Omega_{r,\mu}} U}{\partial \omega_r} \mid E_r ;$$

e da questa si arriva di nuovo, nel caso $2\varrho = n + 1$, per essere $\mu = 1$, alla (3) che fornisce la $\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U)$ sotto forma di divergenza nel modo indicato.

2. *Caso del* $G_\Omega(G_\Omega U)$. — *a*) Se $2\varrho \leq n + 1$, tenuto conto che $(-1)^{\varrho^2} = (-1)^\varrho$ e che $E_i E_k = (-1)^\varrho E_k E_i$, si avrà successivamente:

$$G_\Omega(G_\Omega U) = (-1)^\varrho \left\{ G_\Omega \frac{\partial U}{\partial \omega_1} E_1 + G_\Omega \frac{\partial U}{\partial \omega_2} E_2 + \cdots + G_\Omega \frac{\partial U}{\partial \omega_m} E_m \right\}$$

$$G_\Omega(G_\Omega U) = (-1)^\varrho \sum \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \, \partial \omega_k} (E_i E_k + E_k E_i) =$$

$$= (-1)^\varrho [1 + (-1)^\varrho] \sum \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \, \partial \omega_k} E_i E_k ;$$

d'onde

$$(4) \qquad G_\Omega(G_\Omega U) = [1 + (-1)^\varrho] \sum \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \, \partial \omega_k} E_i E_k$$

per tutti i valori di i, k da 1 ad m, e con $i < k$.

In modo analogo, se $2\varrho \geqq n + 1$, essendo $(-1)^{\varrho'^2} = (-1)^{\varrho'}$, $E_i E_k = (-1)^{\varrho'} E_k E_i$ (il prodotto $E_i E_k$ è ora regressivo), si avrà l'analoga della (4):

$$(4') \qquad G_\Omega(G_\Omega U) = [1 + (-1)^{\varrho'}] \sum \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \, \partial \omega_k} E_i E_k$$

con l'analoga estensione pel $\sum$, e con la differenza che nella (4) i prodotti $E_i E_k$ sono progressivi. Dalla (4) segue che, *se ϱ è dispari e non supera $\frac{n+1}{2}$ il $G_\Omega(G_\Omega U)$ è identicamente nullo*; e della (4') segue che *altrettanto avviene ove ϱ superi $\frac{n+1}{2}$ e sia di parità diversa con $n + 1$*. Sicchè, in linguaggio ordinario, possiamo dire: *In uno spazio ad un numero qualsiasi n di dimensioni, il gradiente del gradiente di una funzione scalare U è identicamente nullo nei due casi seguenti*: 1°) *Se l'ordine ϱ della formazione rispetto alla quale si opera è dispari e non supera la metà di quel numero di dimensioni aumentato di* 1; 2°) *Se ϱ, superando questa metà, ha la medesima parità di tal numero di dimensioni.*

Nei casi eccettuati dal precedente teorema alle (4), (4') si può dare la forma unica

$$(5) \quad G_\Omega(G_\Omega U) = 2 \sum \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \, \partial \omega_k} E_i E_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m \,;\, i < k).$$

Il caso maggiormente interessante al presente, essendo quello di ϱ pari ed $n+1 \geq 2\varrho$, possiamo notare che $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_\mu}$ avendo il significato dato nel n. 1, alla (5) può sostituirvi l'altra

$$(5') \qquad G_\Omega(G_\Omega U) = 2 \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{r=1}^{r=\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \partial \omega_{i_r}} E_i E_{i_r} ;$$

che è, come dovevasi aspettare, la supplementare della (2), tenendo conto della parità di ϱ. Così, quando sia proprio $n+1 = 2\varrho$ (con ϱ pari, ripetiamo, si ha

$$(6) \qquad G_\Omega(G_\Omega U) = \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{\xi_i} \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \partial \omega_{i_1}}$$

con ξ_i avente lo stesso significato che in (3); per cui segue essere il $G_\Omega(G_\Omega U)$ eguale al $\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U)$. Con l'intervento della formazione $\Omega_{r,\mu}$ di cui al n. 1, *b*) e di un $G_{\Omega_{r,\mu}}$ analogo al $\nabla_{\Omega_{r,\mu}}$ ivi considerato, può essere dato al $G_\Omega(G_\Omega U)$ una forma analoga alla (2') data pel $\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U)$; cioè la

$$(4') \qquad G_\Omega(G_\Omega U) = \sum_{r=1}^{r=m} \frac{\partial G_{\Omega_{r,\mu}} U}{\partial \omega_r} E_r .$$

b) Se si considera, a fianco della formazione $\Omega = \sum \omega_i E_i$, la formazione istessa scritta nella forma

$$(7) \qquad \Omega_1 = \omega_{1_1} E_{1_1} + \omega_{2_1} E_{2_1} + \cdots + \omega_{m_1} E_{m_1}$$

che si dirà l'*opposta* della precedente, si troverà che il gradiente e l'hamiltoniano di U rispetto alla Ω_1 sono rispettivamente

$$(8) \qquad \cdots \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{\xi_i} \frac{\partial U}{\partial \omega_{i_1}} | E_{i_1} \qquad (9) \qquad \cdots \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{\xi_i} \frac{\partial U}{\partial \omega_{i_1}} | E_{i_1} ,$$

perchè: $\varrho = \varrho' =$ numero pari, $(-1)^{\varrho\varrho'} = +1$, $(-1)^{\xi_i} E_{i_1} = | E_i$, $\| E_i = E_i$.

Prendendo ora la divergenza della (8) rispetto alla $| \Omega = \sum_{i=1}^{i=m} \omega_i | E_i$, si trova la (6) che si trova pure prendendo quella della (9). Se, invece, le due divergenze vengono prese rispetto alla (7) si trova pure un'espressione unica, ma diversa dalla precedente, cioè la

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \omega_{1_1}} + \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_{2_1}} + \cdots + \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_{m_1}} = L_{\Omega_1} U .$$

Così abbiamo, in entrambi i casi,

$$\nabla_\Omega(\nabla_\Omega U) = G_\Omega(G_\Omega U) = D_\Omega \nabla_\Omega U = D_{|\Omega} G_\Omega U ;$$

ma, nel 1° di tali casi, il valore comune di queste funzioni è

$$\sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{\xi_i} \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_i \partial \omega_{i_1}},$$

mentre che, nel 2°, il valore comune è $L_{\Omega_1} U$.

Il 1° valore è possibile soltanto negli spazii ad un numero dispari di dimensioni della forma $4k-1$; così *ha luogo nel nostro spazio*, e riesce istruttivo farne qui il calcolo esplicito.

Per $n=3$, deve essere $\varrho=2$, e si avrà allora $m=6$. Supponendo che $E_1, \ldots, E_6$ siano scelte in modo da aversi

$$E_1 = e_1 e_2 \;,\; E_2 = e_1 e_3 \;,\; E_3 = e_2 e_3 \;,\; E_4 = e_1 e_4 \;,\; E_5 = e_2 e_4 \;,\; E_6 = e_3 e_4 \;,$$

si avrà:

$$E_{1_1} = e_3 e_4 = E_6 \;,\; E_{2_1} = e_2 e_4 = E_5 \;,\; E_{3_1} = e_1 e_4 = E_4$$

$$E_{4_1} = e_2 e_3 = E_3 \;,\; E_{5_1} = e_1 e_3 = E_2 \;,\; E_{6_1} = e_1 e_2 = E_1$$

$$\xi_1 = 0 \;,\; \xi_2 = 1 \;,\; \xi_3 = 2 \;,\; \xi_4 = 2 \;,\; \xi_5 = 3 \;,\; \xi_6 = 4 \quad \text{ed}$$

$$\omega_{1_1} = \omega_6 \;,\; \omega_{2_1} = \omega_5 \;,\; \omega_{3_1} = \omega_4 \;,\; \omega_{4_1} = \omega_3 \;,\; \omega_{5_1} = \omega_2 \;,\; \omega_{6_1} = \omega_1 .$$

Ne segue applicando la (3), o la (6), che quale funzione a 2° membro si presenta la

$$(-1)^0 \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_1 \partial \omega_6} + (-1)^1 \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_2 \partial \omega_5} + (-1)^2 \frac{\partial^3 U}{\partial \omega_3 \partial \omega_4} +$$

$$+ (-1)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_4 \partial \omega_3} + (-1)^3 \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_5 \partial \omega_2} + (-1)^4 \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_6 \partial \omega_1} ;$$

per cui, raccogliendo i termini simili, si ottiene

$$\nabla_\Omega (\nabla_\Omega U) = G_\Omega (G_\Omega U) = 2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \omega_1 \partial \omega_6} - \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_2 \partial \omega_5} + \frac{\partial^2 U}{\partial \omega_3 \partial \omega_4} \right).$$

È a rilevarsi che, ove $e_1, \ldots, e_4$ siano *vettori indipendenti* di uno *spazio vettoriale misto* a 4 dimensioni, questa formula regge ugualmente.