ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Fisica matematica. — *Omogeneità delle equazioni e Similitudine nella Fisica*. Nota III di Paolo Straneo, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

Applicazione delle considerazioni precedenti alle teorie fisiche.

1. Nelle due Note precedenti, discutendo le Nozioni e i Principî della Similitudine abbiamo veduto come essi siano applicabili alla fisica: *a*) nel caso senz'altro evidente in cui siano dimensionalmente note tutte le entità, variabili o costanti, che possono intervenire nelle relazioni considerate o cercate; *b*) nel caso in cui, pur ammettendo la possibilità dell' intervento, in tali relazioni, di eventuali costanti universali di dimensioni ancora ignote, fosse però sempre possibile di dare *a priori* certe condizioni atte a vincolarne in qualche modo le dimensioni.

In quest' ultimo caso fu anche accennato alle diverse possibili forme di applicazione dei principî, le quali erano caratterizzate dall'ammettere: α) che le dimensioni delle eventuali costanti universali di una data teoria potessero tutte essere espresse mediante alcune determinate costanti fondamentali, di dimensioni fra di loro indipendenti; nel qual caso l'applicazione dei due principî si riduceva alla ricerca delle relazioni possibili fra certe date entità fisiche e quelle costanti fondamentali; oppure: β) che le eventuali costanti universali di una data teoria dovessero avere necessariamente le loro dimensioni sottoposte ad un determinato vincolo; nel qual caso l'applicazione dei due principî si riduceva alla ricerca delle relazioni possibili fra certe entità fisiche ed eventuali costanti soddisfacenti al vincolo dato; oppure finalmente: γ) che la forma di similitudine conveniente ad una data teoria fisica non potesse in generale essere a rapporti arbitrariamente indipendenti per ciascuna delle diverse entità fondamentali, ma dovesse invece avere tali rapporti sottoposti ad un determinato vincolo; nel qual caso l'applicazione del principio di similitudine si riduceva alla ricerca delle possibili relazioni fra date entità fisiche, che rimanessero invariate per tutte le trasformazioni ammesse da quella speciale forma di similitudine.

Ricordando una mia ricerca ancora in corso di pubblicazione, ho infine accennato come in ogni teoria fisica siano sempre verificate le condizioni supposte in α e β, vale a dire come sia sempre possibile assegnare dei vincoli, ai quali debbano essere sottoposte le dimensioni delle costanti universali di quella teoria, ed anche trovare costanti fondamentali indipendenti, mediante le quali tali dimensioni possano venire espresse. Ammesso ciò, la terza forma γ è evidentemente in stretta relazione colle due precedenti, quando le costanti che lasciano invariate le trasformazioni ammesse da quella speciale forma di similitudine, siano appunto le costanti fondamentali del caso α o le equivalenti costanti generiche del caso β.

Vediamo ora con qualche esempio le questioni che si presentano nelle applicazioni dei diversi casi e le loro interpretazioni fisiche.

2. Le applicazioni nel caso *a*) non dovrebbero sollevare alcuna difficoltà essendo esse perfettamente analoghe a quelle note della dinamica. Ma la solita incertezza nella trattazione delle questioni che si riferiscono alle dimensioni fisiche ha qui pure influito, così che sono avvenute talora curiose discussioni, che non hanno certo contribuito a condurre ad una esatta valutazione dell'indole e della portata del principio della Similitudine. Per es. Lord Rayleigh, nell'interessante pubblicazione già ricordata, trattò con questi metodi il problema di Boussinesq del passaggio stazionario h del calore da un buon conduttore di lunghezza a ad un liquido moventesi colla velocità v, per una differenza di temperatura ϑ fra corpo e liquido, giungendo alla formula $h = ka\vartheta\, F(avck^{-1})$ nella quale c rappresenta il calore specifico del liquido, k la conducibilità termica di esso e F una funzione arbitraria che in casi speciali poteva poi venire determinata.

Immediatamente veniva fatta dal sig. D. Riabouchinsky l'osservazione che, se invece delle quattro entità fondamentali (lunghezza, tempo, temperatura e quantità di calore) considerate dal Rayleigh si fosse definito il calore come energia cinetica delle molecole, si sarebbe invece trovata la formula $h = ka\vartheta\, F(vk^{-1}a^{-2}ca^{3})$. A questa osservazione fu risposto da varie parti e brevissimamente anche dallo stesso Lord Rayleigh, ma, a parer mio, non in modo completamente esauriente.

Senza entrare nei particolari della deduzione dell'ultima formula, che qui non interessano, osserviamo solamente che, in seguito alla definizione del calore come energia cinetica delle molecole, il problema precedente (che in fondo consisteva nella ricerca delle relazioni dimensionali possibili fra le entità fisiche *quantità di calore*, *lunghezza*, *tempo*, *temperatura*, *conducibilità*, *calore specifico* e *velocità*) avrebbe dovuto essere meglio definito. Si sarebbe allora veduto che, se ci si proponeva di trattare la questione *microscopicamente* e quindi si consideravano nell'entità velocità tutte le velocità, ivi comprese quelle delle singole molecole, il problema sarebbe divenuto infinitamente complesso; se ci si proponeva invece di trattare la questione *macroscopicamente*, considerando cioè i soli valori medî delle velocità delle molecole, si sarebbe allora dovuto, prima di tutto, introdurre, al posto delle classiche, le nuove entità statistiche, colle rispettive dimensioni; ma in tal caso avremmo certamente ritrovata la formula del Rayleigh.

3. Passiamo ora ad applicazioni in cui possano intervenire costanti universali e trattiamo uno stesso esempio nelle forme α, β e γ del n. 1, onde vederne chiaramente le analogie e le differenze.

Assumiamo ancora il sistema di dimensioni l, t, m, T e proponiamoci di prevedere la relazione di regime fra la densità u dell'energia irraggiata da un corpo nero e la temperatura T dell'ambiente.

α) Se ammettiamo che le dimensioni delle eventuali costanti universali, che possono intervenire nella relazione cercata, debbano essere tutte esprimibili mediante le tre costanti universali ordinariamente usate, velocità della luce c, costante dell'entropia k e costante di Planck h, dalle dimensioni risp. $[l t^{-1}]$, $[l^2 t^{-2} m T^{-1}]$ e $[l^2 t^{-1} m]$, il problema si ridurrà alla ricerca delle relazioni logicamente possibili della forma: $u = f(T, c, k, h)$.

Possiamo usare indifferentemente il metodo delle dimensioni o quello della similitudine (Nota II, 2) ponendo, nel primo caso, l'equazione dimensionale $[l^{-1} t^{-2} m] = [T]^{\alpha_1} [l t^{-1}]^{\alpha_2} [l^2 t^{-2} m T^{-1}]^{\alpha_3} [l^2 t^{-1} m]^{\alpha_4}$, o, nel secondo caso, servendoci delle formule di trasformazione (3) della Nota I, l'equazione funzionale $f(T, c, k, h) = \lambda \tau^2 \mu^{-1} f(\vartheta T, \lambda \tau^{-1} c, \lambda^2 \tau^{-2} \mu \vartheta^{-1} k, \lambda^2 \tau^{-1} \mu h)$.

In entrambi i casi giungeremo all'unica relazione $u = [c^{-3} k^4 h^{-3}] T^4$, che è la nota legge di Stefan-Boltzmann colla costante universale espressa in funzione delle c, k ed h assunte come fondamentali.

β) Se invece ammettiamo che le λ, τ, μ e ϑ delle dimensioni delle varie costanti della teoria non possano essere completamente arbitrarie, ma debbano soddisfare all'equazione $\lambda + \tau - \mu = \vartheta$, e quindi che una costante generica di quella teoria debba avere le dimensioni $[l^\lambda t^\tau m^\mu T^{\lambda+\tau-\mu}]$, il nostro problema si ridurrà alla ricerca delle possibili relazioni della forma $u = f(T, [l^\lambda t^\tau m^\mu T^{\lambda+\tau-\mu}])$. Qui pure, tanto col metodo delle dimensioni, quanto con quello della similitudine, giungeremo all'unica determinazione $u = [l^{-1} t^{-2} m T^{-4}] T^4$, che è appunto la precedente legge di Stefan Boltzmann, colla costante universale espressa direttamente in funzione delle entità fondamentali l, t, m e T.

γ) Ricorriamo finalmente alla particolare forma di similitudine la quale, per tutte le trasformazioni che può ammettere, lascia invariate le c, k ed h del caso α o la generica costante vincolata del caso β. Le sue formule di trasformazione, come è facile verificare, formeranno un sottogruppo deducibile dal gruppo generale delle (3) della Nota I, quando si faccia $\lambda = x$, $\tau = x$, $\mu = x^{-1}$, $\vartheta = x^{-1}$. Non sarà allora più necessario considerare esplicitamente le dimensioni delle eventuali costanti universali, ma basterà cercare le relazioni della forma $u = f(T)$ che rimangono invariate per quelle trasformazioni. Verremo così a porre la equazione funzionale $f(T) = x^4 f(x^{-1} T)$, la quale è evidentemente soddisfatta solamente dall'ammissione $u = \text{Cost.}\ T^4$ che è appunto la legge di Stefan Boltzmann nella sua forma consueta.

4. A formule di trasformazione corrispondenti a quelle generali, quando si faccia $\lambda = x$, $\tau = x$, $\mu = x^{-1}$, $\vartheta = x^{-1}$, $\eta = x^0 = 1$, e che quindi lasciano invariata, oltre le c, k ed h, anche la costante dielettrica ε e in

generale ogni costante dalle dimensioni $[l^\lambda t^\tau m^\mu T^{\lambda+\tau-\mu}]$ e $[l^\lambda t^\tau m^{\lambda+\tau} e^{-2\lambda-2\tau}]$, il Tolman era giunto fin dal 1914 fondandosi su considerazioni di tutt'altra indole. E appunto per tali considerazioni e per il significato eminentemente fisico che il Tolman credette di poter dare al suo principio, furono sollevate molte obbiezioni, delle quali le più fondate furono quelle deî sigg. E. Buckingham e J. Jshiwara.

Il primo sostenne che il principio del Tolman non era che un caso particolare del principio più generale dell'omogeneità, ma non riuscì a rispondere all'obbiezione del Tolman, che rilevava l'impotenza di tale principio a risolvere questioni fisiche nelle quali possono intervenire costanti universali, per es. a dedurre la procedente relazione $u = \mathrm{Cost}\, T^4$.

L'Jshiwara spinse più innanzi la propria critica e mostrò come si potesse giungere ai risultati del Tolman introducendo sempre nelle formule ordinarie del principio dell'omogeneità la considerazione delle costanti c, k, h ed ε, senza però mostrare *se, perchè e in quali limiti* la considerazione di quelle quattro costanti dovesse bastare in tutti i casi.

Le nostre considerazioni rispondono esaurientemente a tutte queste difficoltà. Il principio dell'omogeneità nella sua forma generale non è applicabile alle teorie fisiche quando è possibile l'intervento di costanti universali di dimensioni ignote. È invece perfettamente applicabile a determinate teorie, quando in esso si introduca la considerazione delle sue possibili costanti universali. Tale considerazione, sia pure implicitamente, aveva introdotto il Tolman colla limitazione delle trasformazioni ammissibili a quelle sole che lasciano invariate le dimensioni delle c, k, h ed ε, e quindi dei loro prodotti, giungendo così ad una speciale forma di similitudine valevole in tutto il campo in cui sussiste la condizione che le eventuali costanti universali debbano essere tutte esprimibili per mezzo delle c, k, h ed ε, vale a dire in tutto il campo dell'interpretazione fisica fondata sulla termodinamica e sulla teoria di Maxwell. Da questo punto di vista, quindi, le formule del Tolman possono essere utilissime.

Il fatto invece della possibilità di concepire infiniti universi fisici simili al nostro non può essere considerato come un nuovo principio atto a determinare una speciale interpretazione dell'universo fisico, perchè esso è comune a tutte le interpretazioni fisiche, quando solamente siano in accordo col principio generale dell'omogeneità.

Interpretazione fisica delle diverse forme di Similitudine.

5. Vediamo ora di interpretare le diverse forme di similitudine che abbiamo incontrate mediante la considerazione fisica degli universi che, secondo esse, possiamo immaginare dedotti dal nostro.

Alla forma più generale, coi varî rapporti principali completamente indipendenti, corrisponde una molteplice infinità di universi simili al nostro, ai quali si può giungere variando, secondo rapporti arbitrarî, le entità fondamentali, tanto delle diverse entità fisiche variabili, quanto delle costanti. In tali universi l'etere sarà quindi in generale differente dal nostro.

Però in cotesti universi simili, che le mie citate ricerche sulle costanti universali mostrano essere sempre concepibili, sussistono senz'altro tutte le leggi della nostra meccanica e anche quelle della nostra fisica, purchè si esprimano esplicitamente e si trasformino convenientemente tutte le costanti universali che in esse figurano.

Il fisico che sperimentasse in ciascuno di cotesti universi, colle stesse norme come nel nostro, troverebbe le nostre leggi; ma il fisico che dal nostro universo ne osservasse uno qualsiasi, riscontrerebbe bensì che in esso le leggi hanno le stesse forme di quelle del nostro; ma dalla differenza dei valori delle costanti rileverebbe la differenza dei due eteri.

Alla forma meno generale, coi rapporti vincolati, corrispondono infiniti universi simili al nostro, ma sottoposti alla condizione che in essi debbono rimanere invariate certe espressioni dimensionali. Quando queste sono le costanti universali di qualche teoria, come nel caso del paragrafo precedente, cotesti universi simili dovranno avere un etere assolutamente eguale al nostro o, in altri termini, essere universi, quali potrebbero concepirsi realizzati nel nostro etere.

Il fisico che sperimentasse in essi troverebbe naturalmente le nostre stesse leggi, e il fisico che li studiasse dal nostro universo riscontrerebbe non solo l'identità della forma delle leggi, ma anche quella dei due eteri. Gli universi *in miniatura* considerati dal Tolman sono appunto di questo genere.

Meccanica. — *Sopra il movimento di rotazione diurna della Terra.* Nota I di A. Antoniazzi, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Il movimento diurno della Terra, considerata come corpo rigido avente forma di ellissoide di rotazione, è ormai stato studiato con la profondità e la estensione necessarie per l'uso astronomico, il quale richiede la migliore conoscenza del movimento dell'asse terrestre nello spazio e quindi la rappresentazione in numeri della Precessione degli equinozi e della Nutazione. Ma questo risultato si consegue con lungo procedimento analitico e complicati sviluppi in serie, attraverso i quali è difficile seguire il significato meccanico del problema, la cui soluzione non può dirsi completa, perchè non dimostra il legame esistente fra i due movimenti dell'asse ter-