ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Alla forma più generale, coi varî rapporti principali completamente indipendenti, corrisponde una molteplice infinità di universi simili al nostro, ai quali si può giungere variando, secondo rapporti arbitrarî, le entità fondamentali, tanto delle diverse entità fisiche variabili, quanto delle costanti. In tali universi l'etere sarà quindi in generale differente dal nostro.

Però in cotesti universi simili, che le mie citate ricerche sulle costanti universali mostrano essere sempre concepibili, sussistono senz'altro tutte le leggi della nostra meccanica e anche quelle della nostra fisica, purchè si esprimano esplicitamente e si trasformino convenientemente tutte le costanti universali che in esse figurano.

Il fisico che sperimentasse in ciascuno di cotesti universi, colle stesse norme come nel nostro, troverebbe le nostre leggi; ma il fisico che dal nostro universo ne osservasse uno qualsiasi, riscontrerebbe bensì che in esso le leggi hanno le stesse forme di quelle del nostro; ma dalla differenza dei valori delle costanti rileverebbe la differenza dei due eteri.

Alla forma meno generale, coi rapporti vincolati, corrispondono infiniti universi simili al nostro, ma sottoposti alla condizione che in essi debbono rimanere invariate certe espressioni dimensionali. Quando queste sono le costanti universali di qualche teoria, come nel caso del paragrafo precedente, cotesti universi simili dovranno avere un etere assolutamente eguale al nostro o, in altri termini, essere universi, quali potrebbero concepirsi realizzati nel nostro etere.

Il fisico che sperimentasse in essi troverebbe naturalmente le nostre stesse leggi, e il fisico che li studiasse dal nostro universo riscontrerebbe non solo l'identità della forma delle leggi, ma anche quella dei due eteri. Gli universi *in miniatura* considerati dal Tolman sono appunto di questo genere.

Meccanica. — *Sopra il movimento di rotazione diurna della Terra.* Nota I di A. Antoniazzi, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Il movimento diurno della Terra, considerata come corpo rigido avente forma di ellissoide di rotazione, è ormai stato studiato con la profondità e la estensione necessarie per l'uso astronomico, il quale richiede la migliore conoscenza del movimento dell'asse terrestre nello spazio e quindi la rappresentazione in numeri della Precessione degli equinozi e della Nutazione. Ma questo risultato si consegue con lungo procedimento analitico e complicati sviluppi in serie, attraverso i quali è difficile seguire il significato meccanico del problema, la cui soluzione non può dirsi completa, perchè non dimostra il legame esistente fra i due movimenti dell'asse terrestre, quello nello spazio, sopra accennato, e quello nell'interno della massa terrestre, che dà origine alle Variazioni delle latitudini. È noto dalla Cinematica che l'asse istantaneo di rotazione di un corpo rigido non può variare la propria direzione nello spazio se contemporaneamente esso non si sposta nell'interno del corpo, così che, nel caso attuale, non potrebbe esistere il movimento di Precessione e Nutazione dell'asse terrestre ove non esistesse in pari tempo il movimento che dà origine alle Variazioni delle latitudini. E si può intuire che un tale risultato debba anche estendersi nel senso che, se l'un movimento si compone di più movimenti periodici, anche l'altro sarà composto da più movimenti che dipendono dagli stessi periodi del primo, quantunque, nella composizione dei due movimenti, i varî periodi possano influire in maniera affatto diversa. Questi fatti risultano da una trattazione diretta del problema, che può farsi dopo aver attribuito forma alquanto più agile della consueta alle equazioni cardinali del movimento di rotazione di un corpo rigido intorno ad un punto fisso, o coincidente col baricentro del corpo [1].

Come è noto, le equazioni ora accennate esprimono che: *Le derivate rapporto al tempo dei momenti delle quantità di moto rispetto a tre assi ortogonali passanti per il centro di rotazione ed aventi direzione fissa, sono rispettivamente eguali ai momenti risultanti delle forze rispetto ai tre assi.* Sotto forma vettoriale, le tre equazioni si riassumono nell'unica

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \Gamma \tag{1}$$

cioè: *La derivata, fatta con riferimento ad assi di direzione invariabile, del momento* K *delle quantità di moto rispetto al centro di rotazione, è eguale al momento risultante* Γ *delle forze esterne.*

Questa equazione semplicissima è poco utile in pratica, poichè il moto del corpo fa variare il momento K delle quantità di moto, non solo per effetto della variazione di velocità, ma ancora per il diverso orientamento che il corpo prende rispetto agli assi, alterandosi così (rispetto a questi) la distribuzione della materia, e con essa (in generale) i momenti e i prodotti di inerzia. Per tale motivo, in luogo della equazione precedente, si suole adottare quella che vale per assi mobili insieme con il corpo e che riassume le tre equazioni di Eulero, purchè i tre assi di riferimento siano gli assi principali d'inerzia del corpo. Tale equazione si deduce dalla (1) tenendo conto della relazione che esiste fra la derivata $\frac{d}{dt}$ di un vettore

[1] Pervenni ad un tale risultato studiando le Lezioni di Meccanica razionale del collega prof. Levi-Civita, allo scopo di preparare le mie lezioni sulla Precessione e Nutazione.

fatta con riferimento ad assi di direzione invariabile e la derivata $\frac{d'}{dt}$ fatta con riferimento ad assi che ruotano con velocità angolare ω rispetto ai primi. Poichè la prima derivata rappresenta una velocità assoluta, la seconda una velocità relativa, la differenza sarà una velocità di trascinamento

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d'\mathbf{K}}{dt} + \omega \wedge \mathbf{K} .$$

Si noti che questa formula può essere combinata con la (1) senza alcuna restrizione intorno al valore di ω, così che la equazione

$$\frac{d'\mathbf{K}}{dt} + \omega \wedge \mathbf{K} = \boldsymbol{\Gamma} \tag{2}$$

è valevole qualunque sia ω, purchè la derivazione sia fatta con riferimento ad assi mobili con velocità angolare ω. Essa comprende come casi particolari la equazione (1) relativa ad assi fissi ($\omega = 0$) e la equazione riassuntivá delle tre equazioni di Eulero, purchè si assuma per ω la velocità stessa di rotazione del corpo.

Nella pratica applicazione della (2) si incontrerebbe, in generale, la stessa difficoltà che si trova per l'applicazione della (1), e cioè che il moto del corpo, variandone l'orientazione rispetto agli assi, fa variare il momento K delle quantità di moto indipendentemente da ogni variazione di velocità. In un solo caso tale difficoltà si elimina, quando cioè l'ellissoide d'inerzia sia rotondo, poichè allora, conservando l'asse coordinato z in coincidenza con l'asse di figura del detto ellissoide, gli altri due assi $x\,y$, purchè si mantengano fra loro ortogonali, possono prendere qualunque orientamento nel piano equatoriale senza che perciò abbiano a mutare i rispettivi momenti d'inerzia. Affinchè ciò avvenga, dovranno le componenti intorno agli assi $x\,y$ della velocità angolare del triedro di riferimento essere rispettivamente eguali alle componenti della velocità angolare del corpo, ma potrà essere qualunque la componente della velocità angolare intorno all'asse z.

Se si indicano con A i momenti d'inerzia, fra loro eguali, intorno agli assi $x\,y$, con C il momento d'inerzia intorno all'asse z, con $p\;q\;n$ le componenti della velocità del corpo intorno ai tre assi, saranno

$$\mathrm{A}p \qquad \mathrm{A}q \qquad \mathrm{C}n$$

le componenti del vettore $\mathbf{K}$.

Indicando ancora con $p\;q\;\nu$ le componenti della velocità ω del triedro di riferimento, con P Q N i momenti delle forze esterne rispetto ai tre assi coordinati, si ha, proiettando la (2) sui tre assi

$$
(3) \qquad \begin{cases} A \dfrac{dp}{dt} + (Cn - A\nu)\, q = P \\[2mm] A \dfrac{dq}{dt} - (Cn - A\nu)\, p = Q \\[2mm] C \dfrac{dn}{dt} \qquad\qquad\qquad = N. \end{cases}
$$

Momento, rispetto al centro di gravità della Terra, delle forze di attrazione esercitate da un punto esterno sui varî elementi della massa terrestre.

Sia S un punto di massa M (centro del Sole o della Luna, nel quale punto si supponga concentrata la massa dell'astro), sia r la distanza del punto S dal centro della Terra O ed r_i la sua distanza da un punto della Terra di massa m_i. Se si indica con R_i il vettore $m_i S$, con k la costante dell'attrazione solare, si avrà l'attrazione di S su m_i espressa da

$$k^2 M \frac{m_i}{r_i^3} R_i$$

e si può notare che, essendo $k^2 M \frac{m_i}{r_i^3}$ una quantità scalare, il momento della forza sopra espressa, rispetto a un punto qualunque, è eguale al prodotto della quantità scalare per il momento di R_i rispetto al punto stesso.

Si assuma un sistema di coordinate geocentrico che abbia l'asse c diretto verso il punto S e il piano bc passante per l'asse di simmetria della Terra e sia quindi un piano di simmetria della massa terrestre e si indichino con

$$a_i \qquad b_i \qquad c_i$$

le coordinate del punto m_i, con ϱ_i la distanza di questo punto dal centro della Terra. Il vettore R_i, che ha il suo primo estremo nel punto m_i e l'ultimo estremo nel punto di coordinate o, o, r, avrà le componenti

$$-a_i \qquad -b_i \qquad r - c_i$$

per cui il momento di R_i rispetto all'origine delle coordinate O avrà le componenti

$$b_i r \qquad -a_i r \qquad o$$

e il momento risultante di tutte le forze che sollecitano i varî punti della Terra avrà le componenti

$$k^2 \mathrm{M}\, r \Sigma m_i \frac{b_i}{r_i^3} \qquad -k^2 \mathrm{M}\, r \Sigma m_i \frac{a_i}{r_i^3} \qquad o\,.$$

Per la simmetria della massa terrestre rispetto al piano bc, la seconda componente si annulla, poichè ad ogni punto di massa m_i, di coordinate $a_i\, b_i\, c_i$ e distante r_i da S, corrisponde un punto di eguale massa m_i, di coordinate $-a_i\; b_i\; c_i$ e distante quindi ancora r_i da S. Il momento cercato (vettore) è dunque diretto secondo l'asse a; per trovarne la grandezza si osservi che

$$r_i^2 = (r - c_i)^2 + a_i^2 + b_i^2 = r^2 \left(1 - 2\frac{c_i}{r} + \frac{\varrho_i^2}{r^2}\right)$$

$$\frac{1}{r_i^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 - 2\frac{c_i}{r} + \frac{\varrho_i^2}{r^2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Poichè ϱ_i è la distanza di un punto della Terra dal centro di gravità di questa e c_i una coordinata dello stesso punto in un sistema di assi geocentrico, queste due quantità possono raggiungere tutt'al più la lunghezza del raggio equatoriale terrestre, il quale è sempre molto piccolo in confronto delle distanze dei corpi celesti; perciò si può far uso della serie binomiale, limitando gli sviluppi ai termini di secondo ordine rispetto a $\frac{c_i}{r}$ ed a $\frac{\varrho_i}{r}$. Risulta

$$\frac{1}{r_i^3} = \frac{1}{r^3}\left(1 + 3\frac{c_i}{r} - \frac{3}{2}\frac{\varrho_i^2}{r^2} + \frac{15}{2}\frac{c_i^2}{r^2}\right)$$

e, per conseguenza, il momento cercato sarà

$$k^2 \mathrm{M} \frac{1}{r^2} \Sigma m_i \left(b_i + 3\frac{b_i\, c_i}{r} - \frac{3}{2}\frac{b_i\, \varrho_i^2}{r^2} + \frac{15}{2}\frac{b_i\, c_i^2}{r^2}\right).$$

Nella ipotesi fatta che la Terra abbia forma di un ellissoide di rotazione, la massa terrestre sarà simmetrica, non solamente rispetto a qualunque meridiano, ma anche rispetto all'equatore e quindi il centro di gravità è anche centro di simmetria e perciò a ogni punto di massa m_i e di coordinate $a_i\, b_i\, c_i$ corrisponde un punto di eguale massa m_i e di coordinate $-a_i\; -b_i\; -c_i$. In tal caso i termini di ordine dispari in $a_i\; b_i\; c_i$ si annullano e rimane la espressione del momento cercato

$$k^2 \mathrm{M} \frac{3}{r^3} \Sigma m_i\, b_i\, c_i\,.$$

Passiamo ora dal sistema di coordinate $a\ b\ c$ all'altro sistema che abbia l'asse x in coincidenza con l'asse a, l'asse z in coincidenza con l'asse di figura della Terra, cioè diretto al polo boreale del mondo e formante quindi con c l'angolo $90 - \delta$, essendo δ la declinazione di S. Sarà z l'asse principale d'inerzia della Terra, al quale corrisponde il momento massimo C e gli assi $x\ y$, situati sull'equatore, quantunque non fissi nella massa terrestre, saranno tuttavia sempre due assi principali d'inerzia, cui corrispondono eguali momenti A. Il momento cercato delle forze di attrazione di S sui varî punti della massa terrestre sarà diretto secondo l'asse x e sarà quindi eguale alla sua componente P, mentre le altre due componenti saranno nulle. Si ha

$$c_i = z_i \operatorname{sen} \delta + y_i \cos \delta$$

$$b_i = y_i \operatorname{sen} \delta - z_i \cos \delta$$

da cui

$$b_i c_i = \frac{1}{2} (y_i^2 - z_i^2) \operatorname{sen} 2\delta - y_i z_i \cos 2\delta .$$

Poichè $x\ y\ z$ sono assi principali d'inerzia si ha

$$\Sigma m_i (y_i^2 + x_i^2) = \mathrm{C} \qquad \Sigma m_i (x_i^2 + z_i^2) = \mathrm{A} \qquad \Sigma m_i y_i z_i = 0$$

e pertanto

$$\mathrm{P} = k^2 \mathrm{M} \frac{3}{2r^3} (\mathrm{C} - \mathrm{A}) \operatorname{sen} 2\delta \qquad \mathrm{Q} = 0 \qquad \mathrm{N} = 0 .$$

Meteorologia. — *La frequenza dei temporali in Val Padana.* Nota di FILIPPO EREDIA, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

Dai molti studii sui temporali estivi ne è risultato che la maggior parte di essi, quasi il 70 %, si manifestano in vicinanza del momento in cui suole verificarsi la temperatura massima del giorno. La causa essenziale della formazione di questi temporali, risiede nella elevata temperatura che si raggiunge nei bassi strati atmosferici; essi sono inoltre favoriti da pressione atmosferica quasi livellata, con valore vicino alla media, da venti deboli e da rilevante umidità dell'aria. Come è noto, in tali circostanze si individuano perturbazioni cicloniche poco profonde di piccolo diametro, causate da intense correnti di convezione dovute al maggiore riscaldamento del suolo, le quali divengono tanto più ragguardevoli quanto più rilevante è la diminuzione della tempetatura con l'altitudine.

Il Prestel fu il primo a rilevare che la maggior parte dei temporali estivi si manifesta con pressione barometrica prossima alla media o di poco al disotto di essa. Nei paesi di montagna, dove i temporali locali sono meno