

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° SEMESTRE.



ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Ma inversamente, supposta soddisfatta questa, indi anche la $\frac{\partial \Omega}{\partial u} = 0$, si verifica facilmente che sussistono le proporzioni (16), e quindi le linee $v = \text{cost}$ sulla S' sono in effetto linee di curvatura. Così la proprietà enunciata alla fine del n. 7 è stabilita.

Come ulteriore conferma, si osservi che dalla (B) segue l'altra

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) = \sqrt{EG} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{r_1 r_2} \right),$$

onde, derivando la (12) rapporto a v , deduciamo

$$\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2} \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \sin \theta \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\sqrt{G}}{r_1} \right) = -\frac{1}{k} \left(\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\sqrt{EG}}{k} \cos \theta \right).$$

D'altra parte la (12) può anche scriversi

$$\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2} \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \sin \theta \right) \cdot \sqrt{G} \sin \theta = - \left(\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\sqrt{EG}}{k} \cos \theta \right),$$

e paragonando risulta

$$(18) \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\sqrt{G}}{r_1} + \frac{\sqrt{G}}{k} \sin \theta.$$

Dunque la θ tratta dalla (12) soddisfa alla equazione differenziale (18), alla quale si riduce appunto la (b) n. 2 per $\sigma = \frac{\pi}{2}$, $a = k$. Questa esprime, come si è visto, che le linee (u, v) formano sulla S' un sistema ortogonale che, per essere inoltre coniugato, coincide con quello delle linee di curvatura.

Matematica. — *Sull'analisi delle singolarità puntuali delle superficie algebriche mediante divisioni di polinomi.* Nota del Corrispondente F. ENRIQUES ⁽¹⁾.

1. Prendiamo le mosse dal problema fondamentale della teoria delle singolarità delle curve piane: determinare i punti multipli successivi di un ramo dato mediante la rappresentazione parametrica

$$(1) \quad x = t^n, \quad y = at^{n'} + bt^{n''} + \dots$$

Questo problema si lascia risolvere coll'uso di successive trasformazioni quadratiche (Nöther) o con analisi algebrica diretta, come ho accennato nella mia Nota del 7 maggio 1916; il risultato è che « i punti successivi del ramo, colle loro molteplicità, vengono pòrti dal procedimento per la ricerca del massimo comun divisore fra i numeri $n, n', n'' \dots$ ».

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1917.

Conviene presentare quest'analisi sotto un altro aspetto, che indichi la possibilità di una generalizzazione, relativa al caso delle superficie che abbiamo in vista.

Anzitutto il nostro problema fondamentale si riferisce a sviluppi in *serie*, che vengono forniti dal teorema di Puiseux; ma, poichè l'analisi dipende soltanto da un numero finito di termini delle serie anzidette, è lecito surrogare le *serie* con *polinomi*. Così, sostituendo alla curva data una curva razionale che l'approssimi convenientemente lungo un ramo, siamo condotti a ricercare « i punti multipli successivi di una curva razionale

$$(2) \quad x = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_3(t)}, \quad y = \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_3(t)},$$

considerata nell'intorno d'un suo punto $t = t_0$. Anzi la forma particolare degli sviluppi di Puiseux permette di prendere qui

$$\varphi_3(t) = 1, \quad \varphi_1(t) = t^v;$$

particolarizzazioni semplificatrici, ma — del resto — non essenziali.

Si indichi con φ la curva rappresentata dalle formule (2), con n il suo ordine (che sarà dato dall'ordine del polinomio φ_2), e con O l'origine delle coordinate x e y , cioè il punto di essa che risponde al valore $t=0$ del parametro, cui spetta per la curva la molteplicità ν ($\nu \leq \nu' < \nu'' \dots$).

I punti multipli successivi della curva φ , infinitamente vicini al punto O , si possono mettere in evidenza come segue:

1) anzitutto, il punto proprio O , di molteplicità ν , appare colla stessa molteplicità sulla curva piana φ e sopra una φ_r , trasformata di φ (appartenente ad uno spazio di $\frac{r(r+3)}{2}$ dimensioni) mediante il sistema delle curve piane d'ordine r (> 1);

2) in secondo luogo il punto O_1 di φ , successivo ad O , appare come punto proprio, colla molteplicità che gli compete, sopra la curva φ'_r proiezione di φ_r fatta da O su un generico iperpiano;

3) ancora il punto successivo O_2 appare come punto proprio sulla curva φ''_r proiezione di φ'_r da O_1 , e così di seguito. Essendo r abbastanza alto si esaurisce così la successione dei punti multipli di φ , trovandosi — da un certo momento in poi — sempre punti semplici.

Ora, la serie delle operazioni geometriche che abbiamo descritta, si traduce in un semplice procedimento algebrico. Infatti la curva φ viene rappresentata sulla retta t (asse del parametro t) dalla serie lineare g_n :

$$\lambda_1 t^v + \lambda_2 \varphi_2(t) + \lambda_3 = 0,$$

e la φ_2 è rappresentata sulla medesima retta dalla serie r -pla di codesta g_n^2 , ad es. per $r = 2$, dalla

$$\Phi_2 = \lambda_{11} t^{2\nu} + 2\lambda_{12} t^\nu \varphi_2(t) + 2\lambda_{13} t^\nu + \lambda_{22} \varphi_2^2(t) + 2\lambda_{23} \varphi_2(t) + \lambda_{33} = 0.$$

Posto

$$\varphi_2(t) = at^{\nu'} + bt^{\nu''} + \dots$$

con

$$\nu < \nu' < \nu'' \dots,$$

la presenza dei punti multipli successivi $O, O_1, O_2 \dots$ della curva φ , si rivela nell'esame della serie lineare Φ_2 , come segue:

1) il punto ν -plo O risponde alla circostanza che t^ν compare come massimo divisore comune di tutti i termini della Φ_2 , eccetto il termine costante λ_{33} :

2) fatto $\lambda_{33} = 0$ (con che si ottiene un sistema lineare ∞^4 entro il sistema ∞^5 di tutte le Φ_2), si divida per t^ν , e si cerchi quindi la massima potenza di t che divida quattro Φ_2 linearmente indipendenti (e non una Φ_2 fuori del sistema di quelle): codesta potenza sarà t^ν o $t^{\nu-\nu}$ e il fattore corrispondente darà luogo ad un punto O_1 di φ , la cui molteplicità è rispettivamente ν o $\nu' - \nu$;

3) questo procedimento si prosegue (rispetto a Φ_1 o — se occorre — a una Φ_r con $r > 2$): la serie dei punti successivi della curva φ , colle rispettive molteplicità, vien porta dalla serie delle potenze di t che compaiono come divisori, ciascuna delle quali divide h Φ linearmente indipendenti entro un sistema di dimensione h .

Esaminando gli esponenti che figurano nelle indicate potenze, appare che essi sono: anzitutto i resti delle divisioni successive per la ricerca del massimo comun divisore fra ν e ν' , poi gli analoghi resti nell'algoritmo per la ricerca del massimo comun divisore di ν'' e di m. c. d. (ν, ν'), e così di seguito.

2. In ciò che precede abbiamo indicato un nuovo modo di giustificare l'analisi dei punti successivi d'un ramo di curva piana, dato mediante la sua rappresentazione parametrica. Ora è interessante osservare come il procedimento spiegato sia suscettibile d'estensione. Anzitutto codesto procedimento vale indipendentemente dall'ipotesi particolare

$$\varphi_3(t) = 1, \quad \varphi_1(t) = t^\nu,$$

e, quando si abbiano polinomi φ_2 e φ_3 qualunque, l'analisi assume già l'aspetto generale che s'incontra nella ricerca dei *punti successivi di un ramo di curva gobba*, estendibile a curve di uno spazio con un numero arbitrario di dimensioni ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Cfr. la mia Nota del 15 aprile 1917.

Pongasi

$$\begin{aligned} g_1(t) &= at^v + a_1 t^{v'} + \dots \\ g_2(t) &= bt^\mu + b_1 t^{\mu'} + \dots \\ g_3(t) &= c + c_1 t^\lambda + \dots, \end{aligned}$$

dove tutti i coefficienti designati sono diversi da zero. Quando si forma la serie Φ_r , p. es. la g_{2n}^5 :

$$\Phi_2 = \lambda_{11} g_1 + 2 \lambda_{12} g_1 g_2 + 2 \lambda_{13} g_1 g_3 + \lambda_{22} g_2^2 + 2 \lambda_{23} g_2 g_3 + \lambda_{33} g_3^2 = 0,$$

appare un termine $\lambda_{33} g_3^2$ che non è divisibile per t ; ma, posto $\lambda_{33} = 0$, si ottengono cinque Φ_2 indipendenti che ammettono uno dei divisori t^v, t^μ , sicchè il più piccolo fra i due numeri v, μ , designa la molteplicità del punto O per la curva

$$(\varphi) \quad x = \frac{g_1(t)}{g_3(t)}, \quad y = \frac{g_2(t)}{g_3(t)}.$$

Ora, se p. es. $v < \mu$, la molteplicità del punto successivo O_1 verrà data dal più piccolo fra i numeri: $v' - v, \mu - v, \lambda$, corrispondentemente alla massima potenza di t che apparirà come divisore di quattro Φ_2 linearmente indipendenti (in cui $\lambda_{13} = 0$).

Così potremo proseguire l'analisi che porge i punti multipli successivi della curva φ : le molteplicità di questi dipenderanno sempre dai più piccoli resti ottenuti nel nostro processo di sottrazioni, che è una generalizzazione dell'algoritmo euclideo per la ricerca del massimo comun divisore, dove si ha da operare su gruppi di numeri di cui non è dato un ordine.

3. Dalle curve passiamo alle superficie.

In due Note presentate all'Accademia delle Scienze di Bologna, il 7 maggio 1916 e il 19 maggio 1917, ho indicato la possibilità di rappresentare approssimativamente una falda di superficie nell'intorno d'un punto singolare O mediante funzioni razionali, che saranno in generale del tipo:

$$(\varphi) \quad \begin{cases} x = \frac{\theta(uv) \cdot g_1(uv)}{g_4(uv)} \\ y = \frac{\theta(uv) \cdot g_2(uv)}{g_4(uv)} \\ z = \frac{\theta(uv) \cdot g_3(uv)}{g_4(uv)}; \end{cases}$$

qui si suppone che g_4 non contenga alcun fattore comune ai numeratori delle x, y e z , e si ha da studiare l'intorno del punto O sulla superficie φ , corrispondentemente all'intorno della curva $\theta(uv) = 0$ nel piano (uv) .

Potrà accadere, del resto, che la θ si scinda in più fattori (polinomi in u, v):

$$\theta = \theta_1^{\alpha} \theta_2^{\beta} \dots$$

Ora i punti multipli appartenenti alla superficie φ nell'intorno di O potranno corrispondere:

a) a curve del piano che, facendo parte dell'intorno di θ , dovranno essere componenti di θ ;

b) e a punti o gruppi di punti ⁽¹⁾.

La ricerca dei punti multipli della specie a) dà luogo ad un procedimento di divisioni successive di polinomi, che è l'immediata estensione di quello innanzi descritto per la ricerca concernente le singolarità delle curve. Il procedimento a cui accenniamo verrà spiegato, per semplicità di discorso, nel caso in cui θ sia *irreducibile* e le $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ non abbiano altro divisore comune.

Si consideri il sistema Φ_r multiplo, secondo un numero r abbastanza elevato, del sistema lineare di curve piane

$$|\varphi| = \lambda_1 \theta \varphi_1 + \lambda_2 \theta \varphi_2 + \lambda_3 \theta \varphi_3 + \lambda_4 \varphi_4;$$

si potrà scrivere simbolicamente:

$$|\Phi_r| = (\lambda_1 \theta \varphi_1 + \lambda_2 \theta \varphi_2 + \lambda_3 \theta \varphi_3 + \lambda_4 \varphi_4)^r,$$

cioè

$$|\Phi_r| = |\Phi_1|^r = |\varphi|^r,$$

e si avranno

$$N_r = \frac{(r+3)(r+2)(r+1)}{6}$$

curve Φ_r linearmente indipendenti; fra queste $\Phi_r, N_r - 1$ (corrispondenti all'annullamento del coefficiente rappresentato simbolicamente da λ_4^r) risulteranno divisibili per θ . Eseguita la divisione, si cercherà ancora di determinare, ove esista, un sistema lineare di dimensione $N_r - 3$ di $\Phi_r \theta$ (contenente θ come fattore fisso, cioè $N_r - 2$ Φ_r indipendenti) divisibili per θ^2 , e così di seguito.

Il procedimento avrà termine, giacchè si troverà certo un numero s tale che θ^{s+1} non divida $N_r - (s+1)$ Φ_r indipendenti (e se ciò accade per un r per cui $N_r > s+1$, lo stesso accadrà per valori più grandi di r). Infatti l'ordine delle curve Φ_r vale nr , n designando l'ordine delle curve φ_r , cioè cresce proporzionalmente ad r ; invece l'ordine di θ^s è is , i designando

⁽¹⁾ La distinzione è relativa al modo particolare della rappresentazione, poichè una trasformazione birazionale su u e v vale a cambiare un punto in una curva, che tuttavia possiederà i noti caratteri delle curve eccezionali.

l'ordine di θ , e però cresce proporzionalmente ad s ; d'altra parte s è vincolato ad una disuguaglianza rispetto ad N_r , dove quest'ultimo numero cresce come il cubo di r ; ma se θ^s deve dividere una Φ_r , bisogna che sia

$$is \leq nr,$$

e quindi la possibilità della divisione deve arrestarsi — appena si abbia un r un po' grande — per un s piccolo rispetto a N_r .

Abbiamo spiegato il procedimento che vale a determinare i punti multipli a) della superficie φ , vicini ad O , riferendoci al caso in cui il sistema lineare

$$\lambda_1 \theta \varphi_1 + \lambda_2 \theta \varphi_2 + \lambda_3 \theta \varphi_3 + \lambda_4 \theta \varphi_4 = 0$$

possessa una curva fondamentale irriducibile θ . Ora è chiaro che le cose dette si estendono al caso di θ *riducibile*: si avrà ancora da ricercare la divisibilità delle nostre

$$\Phi_r = (\lambda_1 \theta \varphi_1 + \lambda_2 \theta \varphi_2 + \lambda_3 \theta \varphi_3 + \lambda_4 \theta \varphi_4)$$

per polinomi che saranno da scegliere fra i divisori di θ . Soltanto potrà ora occorrere di considerare diverse serie di divisioni, corrispondentemente al caso che si trovino — a partire da O sulla superficie φ — diverse successioni di punti multipli infinitamente vicini.

4. Oltre ai punti multipli a) della superficie φ , appartenenti all'intorno del punto O e rispondenti a curve (fondamentali) del piano (uv) , si hanno ancora da ricercare i punti multipli b) che rispondono a punti o gruppi di punti del detto piano. Meglio che una discussione minuta, vale qui l'esame di alcuni esempi notevoli, i quali avranno anche una certa importanza generale, come avviamento al problema della *classificazione dei punti doppi uniplanari* delle superficie;

Nel seguito supporremo in generale che il punto singolare O della superficie φ corrisponda ad una *curva fondamentale irriducibile* del sistema $|\varphi|$ nel piano rappresentativo (uv) ; codesta curva verrà designata, come innanzi, con θ .

Avremo:

1) Una *prima classe di punti doppi*, corrisponde all'ipotesi che dopo avere staccato la θ da φ , θ non sia più fondamentale per il sistema residuo $|\varphi'|$. In questo caso la θ sarà una curva iperellettica intersecata secondo coppie variabili della g'_2 dalle curve di $|\varphi'|$ (solo nel caso che θ sia di genere zero si possono avere, su θ , le coppie di una g'_2 : allora O è un punto conico ordinario per la superficie φ). Designando con π il genere della θ ($\pi > 0$), avremo su una *sezione piana generica* per O un *tacnodo di specie π* , imperocchè lo staccamento di θ dalle curve di $|\varphi|$ abbassa il

genere precisamente di $\pi + 1$, secondo la nota formula, che dà il genere delle curve spezzate.

Ai *punti doppi* della nominata g'_2 su θ rispondono direzioni per O che danno sezioni piane cuspidate, e quindi $2\pi + 2$ *punti doppi successivi alla curva doppia infinitesima* circondate O.

Rientrano come casi particolari nella nostra prima classe di punti doppi, alcuni casi in cui *la θ si spezza*, segnatamente il caso in cui essa si riduca ad una curva razionale doppia.

Il punto cuspidale ordinario, O, di una superficie φ del terz'ordine, corrisponde a un sistema di cubiche piane passanti per tre punti in linea retta con tangenti fisse: a codesti punti base rispondono i tre punti doppi vicini ad O.

Un punto doppio O con sezioni cuspidate di 2^a specie si presenta sulla superficie del 4° ordine (φ) come caso particolare del tacnodo, e si costruisce come segue.

Si assuma anzitutto una quartica $\theta = C_4$ con due punti doppi A_1 e A_2 , e si fissino su di essa 6 punti $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6$: le curve di 8° ordine passanti per $A_1^4 A_2^4 B_1^2 B_2^2 B_3^2 B_4^2 B_5^2 B_6^2$, segano su C_4 le quaterne di una g_4^3 ; fissando una quaterna di punti base semplici $P_1 P_2 P_3 P_4$, otterremo un sistema lineare ∞^3 di curve $|\varphi|$, di genere 3 e grado 4, avente la curva fondamentale θ , staccando la quale si trova una rete residua composta delle quartiche per $A_1^2 A_2^2 B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6$. (Si avverta che il sistema $|\varphi|$ si deduce — con una trasformazione quadratica — da un sistema di sestiche con 7 punti base doppi e 4 semplici sopra una cubica fondamentale). Ora, si faccia degenerare la θ in una conica contata due volte, $\theta = C_2^2$, e assumiamo su questa: i punti $A_1 A_2$, che saranno base quadrupli per le curve φ d'ordine 8; i punti $B_1 B_2 B_3$, in cui φ dovranno avere dei tacnodi con tangenti fisse; e, finalmente, i punti base semplici P_1 e P_2 , ove le φ dovranno avere tangenti fisse. Il sistema $|\varphi|$ rappresenterà una superficie del 4° ordine con un punto singolare O, tale che le sezioni piane per esso saranno cuspidi di 2^a specie; si avranno per O tre direzioni singolari corrispondenti a $B_1 B_2 B_3$, secondo le quali si trovano tre punti doppi della superficie infinitamente vicini alla retta doppia infinitesima che circonda O.

2) Una seconda classe di punti doppi uniplanari, si ottiene nel caso che la θ possa staccarsi due volte dal sistema $|\varphi|$ (e dai suoi multipli). Allora non è più vero in generale che il genere di θ uguagli la specie delle sezioni (tacnodali) della superficie φ .

L'esempio più semplice di punti doppi della seconda classe si ottiene come segue. Si considerino le cubiche di un fascio passanti per 8 punti dati $A_1 A_2 \dots A_8$ e le ∞^6 curve di 9° ordine che ne costituiscono il sistema triplo, passando per $A_1^3 A_2^3 \dots A_8^3$. A codeste curve di 9° ordine s'imponga di avere un punto doppio P sopra una cubica θ del fascio ($A_1 \dots A_8$); si avrà così

un sistema lineare ∞^3 di curve φ , avente — di conseguenza — un altro punto base semplice P' sopra θ : il genere del sistema $|\varphi|$ così costruito sarà 3, il suo grado varrà 4: staccando la curva fondamentale θ si avrà un sistema residuo di sestiche (passanti per P e quindi per un altro punto fisso di θ) di genere 2 e di grado 2. Pertanto il nostro sistema $|\varphi|$ rappresenta un punto doppio di una superficie del 4° ordine; singolarità notevole che abbassa soltanto di *uno* il genere delle sezioni piane, ma pure abbassa il genere della superficie, riducendola razionale (Nöther).

L'esempio anzidetto si può generalizzare come segue.

Si consideri una quartica θ di genere due, dotata di un punto doppio M , o sopra θ si assumano 10 punti semplici, affatto generici, $A_1 A_2 \dots A_{10}$. Le curve d'ordine 12 passanti per $M^6 A_1^3 A_2^3 \dots A_{10}^3$ formano un sistema lineare di dimensione 9; s'imponga ad esse di possedere due punti doppi P_1 e P_2 , assegnati in posizione generica sopra θ , si otterrà così un sistema $|\varphi|$ di dimensione 3, avente — di conseguenza — due punti base semplici Q_1 e Q_2 sopra θ : il genere di $|\varphi|$ vale 8, il suo grado pure 8. Ora, staccando la curva fondamentale θ da $|\varphi|$ (che possiede i punti base $M^6 A_1^3 \dots A_{10}^3 P_1^2 P_2^2 Q_1 Q_2$) si ottiene un sistema residuo $|\varphi'|$ di curve di 8° ordine, per $M^4 A_1^2 \dots A_{10}^2 P_1 P_2$, contenente — di conseguenza — altri due punti base semplici R_1 e R_2 su θ ; il genere di $|\varphi'|$ varrà 5 e il suo grado 6. Appare così che la superficie φ (d'ordine 8), rappresentata dal sistema $|\varphi|$, possiede un punto doppio O che abbassa di 3 il genere delle sezioni piane, le quali possiederanno dunque un tacnode di specie due; la retta doppia infinitesima che circonda O (cui succede un'altra retta doppia infinitesima) verrà rappresentata dalla serie delle coppie di punti coniugati appartenenti agli interni di R_1 e R_2 .

Ora, vicino ad O , si trova un punto doppio O_1 rappresentato sul piano dalla medesima curva θ di genere due; le sezioni piane di φ per i due punti $O O_1$ sono date dalle quartiche per $M^2 A_1 \dots A_{10}$, e così appare che anche il punto doppio O_1 abbassa di 3 il genere delle sezioni per esso.

i) La classe ima di punti doppi corrisponde all'ipotesi che la curva θ fondamentale per $|\varphi|$ si possa staccare, come fondamentale, dai sistemi successivi. L'esistenza di punti doppi siffatti risulta già provata generalizzando il primo degli esempi precedenti, come segue.

Si considerino le curve d'ordine $3i+3$ passanti per 8 punti $A_1^{i+1} A_2^{i+1} \dots A_8^{i+1}$, queste curve segano sopra una cubica θ per $A_1 \dots A_8$ una serie lineare g_{i+1}^i e formano un sistema lineare di dimensione

$$1 + 2 + \dots + (i+1) = \frac{(i+2)(i+1)}{2}.$$

Imponiamo a codeste curve di avere su θ un punto i -plo P ; si otterrà così un sistema $|\varphi|$ dotato di un altro punto base semplice P' , sistema di dimensione $i+1$, di genere i e di grado $2i+1$.

Staccando la θ si ha un sistema residuo di curve d'ordine $3i$ passanti per $A_2^i \dots A_8^i, P^{i-1}$, e quindi per un altro punto semplice fisso su θ ; il genere si è abbassato di 1, il grado di 2, la θ rimane curva fondamentale; e così successivamente per i volte (compresa la prima).

Al sistema $|\varphi|$, o ad un generico sistema ∞^3 contenuto in esso, risponde una superficie φ che possiede un punto doppio uniplanare di classe i .

Lo studio dell'argomento potrà essere utilmente proseguito: la presente Nota non mira tanto a porgere risposta esauriente ad un problema quanto ad aprire una via di ricerca ai giovani studiosi.

Meccanica. — *Su certi stati di coazione elastica che non dipendono da azioni esterne.* Nota di GUSTAVO COLONNETTI, presentata dal Socio GIAN ANTONIO MAGGI ⁽¹⁾.

In una sua recentissima Nota ⁽²⁾ il prof. G. A. Maggi ha molto opportunamente rilevato l'assetto ormai raggiunto dalla teoria delle distorsioni elastiche: tanto più opportunamente in quanto che il definitivo precisarsi dei limiti di questa teoria è la condizione essenziale perchè si possa sperare di dare finalmente un certo assetto alle nostre idee anche nei confronti di altri stati di coazione elastica che non sono suscettibili di venir classificati nè tra le ordinarie deformazioni della teoria classica, nè tra le moderne distorsioni.

In realtà passano oggi sotto il nome di distorsioni tutti quegli stati di equilibrio elastico che si stabiliscono in assenza di ogni qualsiasi azione esterna, e che si possono intendere generati praticando nel solido un taglio, di forma e posizione arbitraria, imprimendo alle due faccie del taglio degli spostamenti relativi piccolissimi, e risaldando poi tra loro tali due faccie, dopo di aver naturalmente riempiti con nuovo materiale gli spazii vuoti che nello spostamento si fossero prodotti, ed asportata una conveniente porzione di materia là dove lo spostamento stesso tendesse invece a determinare sovrapposizioni di parti.

Io non so se il Weingarten, cui è dovuto il concetto informatore di questa teoria, l'avesse intravista con una maggiore generalità: la cosa è

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 19 giugno 1917.

⁽²⁾ G. A. Maggi, *Posizione e soluzione di alcune questioni attinenti alla teoria delle distorsioni elastiche.* Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie 5^a vol. XXVI (1^o sem. 1917).