# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXVI.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.*

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Meccanica. — *L'ordinaria teoria dell'Elasticità e la teoria delle deformazioni finite.* Nota del Corrisp. E. Almansi [1].

1. In alcune Note pubblicate, nel 1911, in questi stessi Rendiconti, ho esaminate le deformazioni finite dei solidi elastici, proponendomi particolarmente di ottenere delle formule che si avvicinassero, quanto più era possibile, a quelle della teoria ordinaria.

Nella teoria ordinaria si studiano le deformazioni *infinitesime*; si ammette poi che, in via di approssimazione, le formule ottenute valgano anche per deformazioni sufficientemente piccole, e siano quindi applicabili all'esame di fenomeni reali.

Ma, come è ben noto, queste formule non corrispondono, con sufficiente esattezza, ai risultati delle osservazioni, dalle quali in particolare risulta che le componenti di tensione non sono rappresentabili, se non con una approssimazione per la maggior parte dei materiali molto grossolana, mediante funzioni lineari delle caratteristiche della deformazione. D'onde la necessità di prendere in esame le deformazioni *finite*: di studiare, cioè, le deformazioni dei solidi elastici, tenendo conto anche di quei termini che nella teoria ordinaria vengono trascurati. Si possono così ottenere formule più esatte di quelle che fornisce l'ordinaria teoria; e le esperienze potranno allora essere rivolte a determinare, per i diversi materiali, i valori delle costanti che queste formule conterranno.

2. La teoria delle deformazioni elastiche finite presenta, d'altronde, molto interesse anche da un punto di vista puramente teorico; e ciò in

[1] Pervenuta all'Accademia il 22 giugno 1917.

particolare per il fatto che in essa non sussistono quei teoremi i quali nella teoria delle deformazioni infinitesime figurano come teoremi fondamentali.

Dato un corpo elastico C, io chiamerò *deformazione elastica* del corpo il passaggio da uno stato iniziale $S_0$ ad uno stato finale $S_1$, allorchè le proiezioni $u$, $v$, $w$ degli spostamenti dei punti, e le loro derivate prime e seconde, sono funzioni finite e *continue* delle coordinate.

E quando, assunto uno stato $S_0$ di C come stato di riferimento, denoterò con $S_1$ un altro stato *dello stesso corpo* C, intenderò che C possa passare dallo stato $S_0$ allo stato $S_1$ mediante una deformazione che soddisfi alla condizione indicata.

Premesso questo, ricordiamo come nella ordinaria teoria della Elasticità si dimostri che *se* $S_0$ *è uno stato d'equilibrio per un corpo* C *non soggetto a forze esterne, non esistono per il corpo* C, *in assenza di forze esterne, altri stati d'equilibrio* (purchè, secondo la convenzione qui fatta, si considerino come possibili stati *del corpo* C solo quelli che si ottengono, partendo da $S_0$, mediante deformazioni a spostamenti continui).

Ora l'osservazione mostra che vi sono dei casi nei quali questo teorema non risulta verificato.

L'esempio più semplice è fornito dal *rovesciamento di un anello*. Consideriamo lo spazio generato da una superficie piana $\sigma$, la quale ruoti intorno ad una retta $r$ situata nel piano di $\sigma$ e che non incontri questa superficie. Tale spazio sia occupato da un corpo C, elastico, isotropo, non soggetto a forze esterne, in equilibrio; tutte le particelle di cui è formato C siano allo stato naturale. Diremo $S_0$ questo stato del corpo.

Dall'osservazione risulta che esiste per il corpo C, in assenze di forze esterne, un altro stato d'equilibrio $S_1$. Si passa dallo stato $S_0$ allo stato $S_1$ mediante una deformazione elastica la quale consiste essenzialmente in una rotazione di 180° compiuta da ciascuna sezione $\sigma$ dell'anello intorno alla retta baricentrica normale al suo piano. La rotazione è poi accompagnata da una piccola deformazione che la sezione subisce nel piano in cui essa giace.

Esistono, dunque, per un anello non sollecitato da forze esterne, due diversi stati d'equilibrio, $S_0$ ed $S_1$.

Non v'è alcuna ragione perchè la teoria della Elasticità debba escludere *a priori*, dal campo delle proprie ricerche, gli stati d'equilibrio del tipo di $S_1$. E notiamo che essi non vengono esclusi, finchè non siano fissate la forma e le dimensioni del corpo, nemmeno se s'impone, in qualche modo, un limite alla grandezza della deformazione delle singole particelle materiali. Supponiamo che sia assegnato un limite superiore al valore assoluto degli allungamenti unitarî degli elementi lineari del solido. Nel caso dell'anello, la stessa intuizione ci fa prevedere che questo limite non sarà superato, purchè la lunghezza dell'asse dell'anello (luogo dei baricentri delle

sezioni $\sigma$) sia sufficientemente grande rispetto alle dimensioni lineari di una sezione; essendo evidente che se la lunghezza dell'asse oltrepassa un certo limite, lo stato di deformazione delle singole particelle, dovuto al rovesciamento, non sarà più apprezzabile.

3. La sola condizione che per ciascuna particella materiale la deformazione sia piccolissima non basta, dunque, ad escludere questa classe di deformazioni elastiche. Esse vengono escluse allorchè si suppone (come nella teoria ordinaria) che siano piccolissime *tutte* le derivate prime di $u, v, w$ rispetto alle coordinate; mentre, affinchè sia piccolissima la deformazione di ciascuna particella, basta che siano piccolissime quelle sei quantità che caratterizzano la deformazione stessa.

Nello studio delle deformazioni finite conviene assumere come variabili indipendenti le coordinate dei punti del solido nello stato *finale* $S_1$, essendo queste le variabili rispetto alle quali figurano derivate le componenti di tensione nelle equazioni indefinite dell'equilibrio. Come caratteristiche della deformazione, in un punto qualunque P del solido, si possono allora assumere le sei quantità

$$\varepsilon_{xx}\ ,\ \varepsilon_{yy}\ ,\ \varepsilon_{zz}\ ,$$
$$\varepsilon_{yz}\ ,\ \varepsilon_{zx}\ ,\ \varepsilon_{xy}\ ,$$

date dalle formule

$$(1)\quad \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right\}. \end{cases}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè sia piccolissima la deformazione della particella attigua al punto P, è che nel punto P siano piccolissime queste *sei* quantità; e ciò non esige che siano piccolissime le *nove* derivate $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, ecc.

Se le sei caratteristiche risultano piccolissime, *e inoltre si fa la convenzione di trascurare le quantità dell'ordine di grandezza dei loro quadrati*, si può ritenere che le prime tre, $\varepsilon_{xx}$, $\varepsilon_{yy}$, $\varepsilon_{zz}$, rappresentino gli allungamenti unitarî relativi alle direzioni degli assi coordinati, le tre rimanenti gli scorrimenti relativi alle coppie di direzioni $y$ e $z$, $z$ ed $x$, $x$ ed $y$.

Se poi le nove derivate sono esse stesse piccolissime, potremo porre

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}\ \ldots\ \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\ ;$$

e ricadremo nelle formule della teoria ordinaria.

4. Da queste considerazioni vien posto in evidenza un fatto notevole: la possibilità di estendere il campo di ricerche della teoria dell' Elasticità, *anche rimanendo nell'ordine di approssimazione della teoria ordinaria.*

Denoti $\zeta$ una quantità che considereremo piccola del primo ordine. Le sei caratteristiche $\varepsilon_{xx}, \ldots, \varepsilon_{xy}$, date dalla formula (1), siano piccole dell'ordine di $\zeta$; e conveniamo di poter trascurare, nelle loro espressioni, quantità piccole d'ordine superiore. Potremo allora ai secondi membri delle (1) aggiungere dei termini $\delta_{xx}, \ldots, \delta_{xy}$, piccoli d'ordine superiore a $\zeta$, insieme alle loro derivate prime, ma del resto arbitrarî, ossia porre

$$(2) \qquad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\} + \delta_{xx}, \text{ ecc.},$$

e assumere queste sei quantità come espressioni degli allungamenti e degli scorrimenti. Come espressioni delle componenti di tensione $\tau_{xx}, \ldots, \tau_{xy}$, dovremo conservare quelle della teoria ordinaria; in particolare, se il solido è isotropo, si dovrà ritenere

$$\tau_{xx} = \mathrm{A}\{\varepsilon_{xx} + k(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\tau_{xy} = \mathrm{B}\varepsilon_{xy},$$

ove A, B, $k$ denotano delle costanti. Le equazioni dell'equilibrio ci forniranno poi le componenti X, Y, Z ed L, M, N delle forze di massa e delle tensioni agenti in superficie.

Se noi sapremo determinare le funzioni $u, v, w$ (finite, continue, ecc.), e i termini aggiunti $\delta_{xx}, \ldots, \delta_{xy}$ (piccoli dell'ordine voluto), in modo che lo stato assunto dal solido cogli spostamenti $(u, v, w)$, stato che riterremo dovuto alle forze esterne (X, Y, Z) ed (L, M, N), corrisponda ai dati del problema, potremo considerare questo come risoluto.

Il fondamento della teoria ordinaria consiste nel porre

$$\delta_{xx} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}, \text{ ecc.},$$

quindi, per le formule (2), $\varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, ecc.; il che presuppone che le derivate prime delle funzioni $u, v, w$ siano tutte piccole del 1° ordine (o d'ordine maggiore). La teoria generale delle deformazioni elastiche acquista allora una grande semplicità ed eleganza; ma si viene così ad escludere una classe di problemi, i quali possono essere risoluti colla stessa approssimazione, purchè si assegnino ai termini $\delta_{xx}, \ldots, \delta_{xy}$ espressioni diverse.

Nel caso di un anello circolare, denotando con $2\pi$R la lunghezza dell'asse, con $a$ la larghezza della sezione $\sigma$, vale a dire la massima distanza fra due rette tangenti al suo contorno e parallele alla retta $r$ (§ 2), il

massimo valore assoluto degli allungamenti unitarî che hanno origine dal rovesciamento, supposto che $a$ sia molto piccola rispetto ad R, è sensibilmente uguale al rapporto $\zeta = \frac{a}{R}$. E noi ci potremo proporre di determinare lo stato di deformazione che l'anello assume in seguito al rovesciamento, trascurando, nelle espressioni delle sei caratteristiche, quantità piccole d'ordine superiore rispetto a $\zeta$.

Ciò, per altro, non esclude che il problema possa essere studiato e risoluto con un'approssimazione maggiore.

5. Il rovesciamento di un anello ci fornisce un primo esempio di uno stato d'equilibrio $S_1$, diverso dallo stato naturale $S_0$, che un solido elastico può assumere in assenza di forze esterne.

Un altro esempio ci è fornito da una lamina elastica di piccolo spessore, e non perfettamente piana. Esiste in molti casi uno stato d'equilibrio $S_1$, diverso dallo stato naturale, che si ottiene obbligando le gibbosità presentate dalla lamina a passare dalla parte opposta rispetto a quella ove esse si trovano inizialmente.

Sono ben note le importanti ricerche alle quali ha dato occasione, in questi ultimi anni, la teoria delle *Distorsioni*. Anch'essa mette in evidenza, per solidi elastici non sollecitati da forze esterne, stati d'equilibrio a cui corrispondono tensioni esterne diverse da zero.

*Non esiste evidentemente nessuna analogia fra questa classe di fenomeni, e quelli di cui abbiamo dato sopra alcuni esempî.*

Gli stati d'equilibrio $S_1$ da noi considerati si ottengono, infatti, partendo da uno stato $S_0$ in cui le tensioni sono tutte nulle, mediante una deformazione *a spostamenti continui*.

Nella teoria delle distorsioni, invece, si prendono in esame degli stati d'equilibrio, che diremo $S'_0$, i quali non si possono considerare ottenuti a partire da uno stato iniziale $S_0$ in cui tutte le tensioni siano nulle, *se non ammettendo che i relativi spostamenti dei punti presentino delle superficie di discontinuità*. Il passaggio dallo stato $S_0$ ad uno stato $S'_0$ non sarebbe dunque, secondo i criterii qui adottati, una vera e propria deformazione elastica.

A questo proposito mi sia consentito di notare che, nello studio dell'equilibrio elastico, converrebbe forse riportare il concetto di *deformazione* al suo significato primitivo, non comprendendo in tale denominazione se non deformazioni a spostamenti continui. Al di fuori di ogni considerazione di carattere analitico, l'ipotesi della continuità degli spostamenti sembra giustificata dal fatto che, se gli spostamenti sono discontinui, il fenomeno *fisico* si presenta sostanzialmente diverso.

Volendo, allora, limitarsi a considerare, per un determinato corpo C, quei soli stati che si ottengono, a partire da uno stato di riferimento, me-

diante deformazioni elastiche, dovrebbe dirsi, relativamente alla teoria delle Distorsioni, non già che essa considera stati d'equilibrio di corpi i quali ammettono uno stato $S_0$ in cui nessuna particella è soggetta a tensione; ma che essa insegna a costruire, con speciali procedimenti, dei corpi nei quali si hanno sempre, anche se le forze esterne sono nulle, tensioni interne diverse da zero; ed esamina gli stati d'equilibrio che questi corpi assumono in assenza di forze esterne.

## Matematica. — *Osservazioni sui punti singolari delle curve multiple di una superficie algebrica.* Nota del dott. Oscar Chisini, presentata dal Corrispondente F. Enriques [1].

1. In questa Nota mi propongo di svolgere alcune osservazioni critiche relative ai punti singolari che si possono presentare sopra una curva multipla per una superficie algebrica $f(x\,y\,z) = 0$, avendo speciale riguardo all'abbassamento che questi producono sul genere e sulla classe delle sezioni piane o in generale superficiali; di queste osservazioni, alcune delle quali forse nuove e inaspettate, sembra necessario tener conto ove si voglia procedere con rigore nella delicata questione dell'analisi e della risoluzione delle singolarità di una superficie.

2. Per chiarezza cominciamo con l'osservare che sopra la curva, C, multipla per la superficie $f$ (curva che può essere composta di più parti irriducibili dotate anche di diversa molteplicità) un punto, P, che sia semplice per la C, non deve ritenersi singolare per $f$, ove non abbassi la classe delle sezioni piane per esso, riuscendo punto base per il sistema delle curve L segate sopra la superficie $f$ dalle sue polari, fuori della curva multipla C. Questa veduta tiene ad un noto teorema di Halphen sulla rappresentabilità di ciascuna falda della superficie $f$ nell'intorno di un punto generico della curva multipla mediante serie: precisamente se $\nu$ è l'ordine della falda e $y = \Sigma a_i x^i$ lo sviluppo in serie della proiezione della curva C nell'intorno di P, si ha

$$z = \Sigma\Sigma a_{ik}\, x^i\, t^k$$

$$x = x\ ,\ y = t^\nu + \Sigma a_i\, x^i\,.$$

La dimostrazione più semplice di questo teorema si ha osservando che la sostituzione $y = t^\nu + \Sigma a_i x^i$ trasforma la superficie $f(x\,y\,z) = 0$ in un'altra $f'(x\,t\,z) = 0$ per cui $z$ riesce funzione monodroma di $x$ e $t$ in corrispondenza alla falda d'ordine $\nu$ considerata, almeno se per il punto P

[1] Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1917.