

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Imponiamo a codeste curve di avere su θ un punto i -plo P ; si otterrà così un sistema $|\varphi|$ dotato di un altro punto base semplice P' , sistema di dimensione $i+1$, di genere i e di grado $2i+1$.

Staccando la θ si ha un sistema residuo di curve d'ordine $3i$ passanti per $A_2^i \dots A_8^i, P^{i-1}$, e quindi per un altro punto semplice fisso su θ ; il genere si è abbassato di 1, il grado di 2, la θ rimane curva fondamentale; e così successivamente per i volte (compresa la prima).

Al sistema $|\varphi|$, o ad un generico sistema ∞^3 contenuto in esso, risponde una superficie φ che possiede un punto doppio uniplanare di classe i .

Lo studio dell'argomento potrà essere utilmente proseguito: la presente Nota non mira tanto a porgere risposta esauriente ad un problema quanto ad aprire una via di ricerca ai giovani studiosi.

Meccanica. — *Su certi stati di coazione elastica che non dipendono da azioni esterne.* Nota di GUSTAVO COLONNETTI, presentata dal Socio GIAN ANTONIO MAGGI ⁽¹⁾.

In una sua recentissima Nota ⁽²⁾ il prof. G. A. Maggi ha molto opportunamente rilevato l'assetto ormai raggiunto dalla teoria delle distorsioni elastiche: tanto più opportunamente in quanto che il definitivo precisarsi dei limiti di questa teoria è la condizione essenziale perchè si possa sperare di dare finalmente un certo assetto alle nostre idee anche nei confronti di altri stati di coazione elastica che non sono suscettibili di venir classificati nè tra le ordinarie deformazioni della teoria classica, nè tra le moderne distorsioni.

In realtà passano oggi sotto il nome di distorsioni tutti quegli stati di equilibrio elastico che si stabiliscono in assenza di ogni qualsiasi azione esterna, e che si possono intendere generati praticando nel solido un taglio, di forma e posizione arbitraria, imprimendo alle due faccie del taglio degli spostamenti relativi piccolissimi, e risaldando poi tra loro tali due faccie, dopo di aver naturalmente riempiti con nuovo materiale gli spazii vuoti che nello spostamento si fossero prodotti, ed asportata una conveniente porzione di materia là dove lo spostamento stesso tendesse invece a determinare sovrapposizioni di parti.

Io non so se il Weingarten, cui è dovuto il concetto informatore di questa teoria, l'avesse intravista con una maggiore generalità: la cosa è

⁽¹⁾ Pervenuta all'Accademia il 19 giugno 1917.

⁽²⁾ G. A. Maggi, *Posizione e soluzione di alcune questioni attinenti alla teoria delle distorsioni elastiche.* Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie 5^a vol. XXVI (1^o sem. 1917).

però per lo meno possibile. Egli scriveva infatti a suo tempo in questi stessi Rendiconti (1):

« Nella teoria dell'equilibrio dei solidi elastici si è considerato fino ad ora, mi sembra, soltanto il caso di un corpo le cui particelle subiscono degli spostamenti dalla loro posizione naturale, i quali variano da punto a punto con continuità in tutto lo spazio occupato dal corpo stesso. In tali ipotesi se non agisce nessuna forza esterna, nè sul contorno nè entro lo spazio interno, il corpo non è soggetto a tensioni interne.

« Non pertanto esistono certamente dei corpi soggetti a tensioni interne i quali non sono sottoposti a forze esterne nè sul contorno nè all'interno.

« Per averne un esempio basta immaginare un anello non del tutto chiuso di cui si avvicinino le due sezioni libere e piane attaccandole l'una all'altra con uno strato infinitamente sottile che le saldi insieme ».

Questo esempio del Weingarten, non il concetto più generale espresso nelle linee precedenti e che con esso egli intendeva illustrare, domina però incontestabilmente nel seguito della breve Nota citata: lo stesso esempio continua in sostanza a dominare in tutti gli studi a cui quella Nota ha dato lo spunto.

È ben vero che quell'esempio si è mostrato alla prova fecondo oltre ogni legittima aspettazione, e, attraverso l'opera magistrale del Volterra (2), ha in breve volgere d'anni fatto posto ad una delle più eleganti teorie della moderna fisica matematica.

Le più recenti ricerche del Somigliana (3) hanno però dimostrata l'opportunità di conferire la maggiore generalità alla trattazione, abbandonando tutte quelle restrizioni che non sono rigorosamente necessarie, cioè che non sono imposte in modo assoluto da alcuna considerazione di indole meccanica.

Ora, una volta messi su questa via, occorre, a parer mio, andare fino in fondo, e chiedersi addirittura se l'artificio stesso dei tagli e delle successive risaldature delle loro faccie spostate, a cui si ricorre per generare le distorsioni, sia suscettibile di tutta la desiderabile generalità: se cioè con esso si possano effettivamente giustificare *tutti* i sistemi di tensioni interne che l'esperienza quotidiana ci presenta nei solidi elastici in equilibrio in assenza di forze esterne.

Il dubbio viene suggerito dall'esame di quegli stati di coazione elastica a cui ho accennato in principio, la cui esistenza è ben nota ai tecnici, ma

(1) J. Weingarten, *Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi*. Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie 5^a vol. X (1^o sem. 1901).

(2) V. Volterra, *Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes*. Annales de l'Ecole Normale, 3, XXIV (septembre 1907).

(3) C. Somigliana, *Sulla teoria delle distorsioni elastiche*. Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie 5^a vol. XXIII (1^o sem. 1914). *Sulle discontinuità dei potenziali elastici*. Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. 51 (giugno 1916).

che, malgrado qualche isolato tentativo di trattazione (1), non hanno ancor trovato il loro posto nella teoria matematica dell'elasticità.

Ecco un esempio tra i più caratteristici: un pezzo di acciaio riscaldato a temperatura sufficientemente elevata viene improvvisamente portato a contatto di corpi freddi. L'improvviso e disuguale raffreddamento delle varie sue parti produce allora una contrazione di volume diversa da punto a punto. Le parti del pezzo che si raffreddano più rapidamente acquistano in breve tempo una consistenza maggiore, la quale non permette poi loro di seguire senza reazione i fenomeni di ritiro che si determinano nelle altre parti del pezzo man mano che queste vanno alla lor volta raffreddandosi.

Tutto ciò è comprovato da una quantità di fatti che si verificano regolarmente nelle operazioni di tempra degli acciai, quali la diminuzione di densità dei pezzi temprati (tanto maggiore quanto più grande è stata la velocità di raffreddamento) ed i cambiamenti di forma che nei pezzi stessi si osservano in dipendenza da ogni difetto di uniformità nel processo di raffreddamento (2).

Quanto alle tensioni interne che si vengono così a creare nel pezzo temprato è assai difficile metterle in evidenza direttamente: si può però considerare come una prova della loro esistenza la facilità con cui nei pezzi di acciaio temprati si verificano delle rotture improvvise ed imprevedute, a volte sotto l'azione di sollecitazioni che per se stesse sarebbero assolutamente insufficienti a vincere la resistenza propria del materiale, a volte anche senza nessuna causa apprezzabile (3). È poi notevole che questa specie di fragilità caratteristica dei pezzi temprati scompare (insieme del resto con la diminuzione di densità a cui si è dianzi accennato) se alla tempra si fa seguire una opportuna ricottura con successivo raffreddamento abbastanza lento perchè si possa ritenere praticamente uniforme.

Fatti assolutamente analoghi si verificano nella fusione dei pezzi in ghisa, nella presa dei getti in calcestruzzo (4), nella fabbricazione del vetro, ecc.

Il caso del vetro è particolarmente interessante, almeno dal punto di vista sperimentale, perchè in esso le tensioni interne possono venir messe in evidenza, e anche in certi casi misurate, per mezzo della doppia rifra-

(1) Cfr. ad es. A. Föppl, *Vorlesungen über Technische Mechanik*, Fünfter Band. Leipzig 1907.

(2) Cfr. ad es.: F. Reiser, *Théorie et pratique de la trempe de l'acier*, trad. franc. Paris, 1905.

(3) Cfr. la mia Nota, *Sopra un caso di frattura spontanea di un acciaio temprato*, Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. 52 (gennaio 1917).

(4) Interessanti notizie su questo argomento sono state esposte al recente Congresso di Milano della Società Ital. per il progresso delle scienze dall'Ing. L. Luiggi nella sua conferenza su *L'evoluzione delle dighe per laghi artificiali in alta montagna*, Atti, nona riunione, Roma 1917.

zione accidentale che le accompagna. Ora sta il fatto che qualunque pezzo di vetro rivela in generale, all'esame colla luce polarizzata, la presenza di tensioni interne distribuite nei modi più complicati: tensioni le quali non si eliminano completamente se non dopo un'accuratissima ricottura ed un raffreddamento lentissimo in un ambiente mantenuto a temperatura quanto più possibile uniforme.

Ciò posto è facile rendersi conto della impossibilità di giustificare come distorsioni tutti questi stati di coazione elastica: riesce infatti in primo luogo evidente che la loro presenza non è in alcun modo in relazione col grado di connessione dello spazio occupato dal solido; e per altra parte non si vede, almeno esaminando la questione dal punto di vista fisico, la necessità di superficie di discontinuità del tipo di quelle che il Somigliana ha incontrate nello studio delle distorsioni dei solidi semplicemente connessi.

La ragione di questa apparente contraddizione tra i risultati dell'esperienza quotidiana e quelli delle ricerche teoriche a cui abbiamo accennato, deve, come ho già detto, ricercarsi nella preoccupazione costante, che domina tutte quelle ricerche, di precisare in ogni caso, cioè per ogni stato di tensione in esame, il modo con cui tale stato potrebbe venir riprodotto *meccanicamente*, e più precisamente mediante un'ordinaria deformazione del solido dato, quando esso fosse stato tagliato lungo certe superficie, opportunamente scelte caso per caso. Questa preoccupazione, se per una parte è giustificata dal vantaggio di ricondurre i nuovi problemi a termini il meno diversi che sia possibile da quelli caratteristici della teoria classica dell'elasticità, può d'altra parte esser la causa di una limitazione del campo delle nostre ricerche.

Perchè infatti il descritto meccanismo di generazione dello stato di tensione interna sia applicabile, occorre ovviamente che le deformazioni dei singoli elementi che costituiscono il solido derivino da un unico sistema di spostamenti *generalmente* continuo, il quale cioè non implichi soluzioni di continuità né sovrapposizioni di materia se non in corrispondenza di quelle particolari superficie lungo le quali si intendono praticati i tagli. Ed è noto che questo concetto si traduce analiticamente nella condizione che le sei componenti della deformazione soddisfino ad una certa sestupla di equazioni alle derivate seconde, dette equazioni di congruenza o di Saint-Venant, in tutti i punti del solido, eccezion fatta al più per quelli che appartengono alle particolari superficie sopra ricordate.

Ora è questa condizione fisicamente necessaria? Evidentemente no.

Se infatti noi ci limitiamo a considerare l'intorno di un punto generico del solido come isolato ed indipendente dal resto, nulla ci impedisce di assumere un sistema comunque arbitrario di valori delle componenti della deformazione per rappresentare uno stato effettivamente realizzabile della particella considerata.

E se prescindiamo dal modo di generare la deformazione, nulla ci impedisce di pensare il solido costituito da tanti elementi, deformati come ora si è detto nel modo più generale, i quali si mantengano in un tale stato di coazione elastica per virtù della loro mutua connessione, per modo che non possano restituirsì tutti insieme al loro rispettivo stato naturale non deformato se non vengono prima distrutti i vincoli che a ciascuno di essi sono imposti dalla presenza di tutti gli altri.

In una prossima Nota io mi riservo di procedere ad un sommario esame dei caposaldi su cui potrebbe impostarsi una trattazione generale dell'argomento.

Fisica matematica. — *Sulla distribuzione della corrente elettrica in una lamina metallica immersa in un campo magnetico.* Nota di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Socio TULLIO LEVI-CIVITA (1).

Il Corbino, valendosi della teoria elettronica, ha mostrato, come è noto (Rend. di questa Accad., 1915), che la distribuzione della corrente elettrica in una lamina metallica piana, isotropa, immersa in un campo magnetico \mathbf{H} ad essa normale, dipende da un potenziale V nel modo seguente:

$$(I) \quad \begin{cases} j_x = -K \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \lambda \frac{\partial V}{\partial y} \right) \\ j_y = -K \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \lambda \frac{\partial V}{\partial x} \right), \end{cases}$$

dove:

j_x, j_y rappresentano le componenti della densità di corrente,

K denota la conducibilità specifica della lamina immersa nel campo magnetico \mathbf{H} .

Ora, siano ν il versore (vettore unitario) ed F la grandezza del vettore grad V (di componenti $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$); sia, inoltre, σ il versore del vettore di componenti $\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial x}$ (vettore che risulta normale al precedente).

Vogliamo mostrare che le equazioni (I) possono ottenersi (anzichè ricorrendo alla teoria elettronica) postulando i due seguenti principi:

1) *Il principio di Ohm nei riguardi del flusso di corrente attraverso le linee equipotenziali*, principio che si traduce nella formola

$$j_\nu = -K \frac{\partial V}{\partial \nu},$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1917.