ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Già i recenti studî sul Cenomaniano nella regione mediterranea, segnatamente nel Nord-Africa, hanno messo in evidenza le affinità che le loro faune cenomaniane hanno con quelle sincrone imalayane: ora il confronto diretto che ho potuto fare fra la fauna cenomaniana tripolitana-tunisina e questa transimalayana mi convince che le corrispondenze faunistiche fra i giacimenti cenomaniani mediterranei e quelli imalayani, in occidente e in oriente del grande Mediterraneo cretacico, si fanno sempre più manifeste, col progredire degli studî e delle conoscenze.

Nel riguardo paleontologico è da notare ancora un'altra circostanza comune alle due lontane regioni: ed è la incertezza nei limiti fra Cenomaniano e Turoniano, dovuta ad orizzonti con rudiste, nei quali si hanno forme che passano dal Cenomaniano superiore al Turoniano inferiore, come appunto si osserva nella piccola fauna a rudiste di Chisìl. Mancano indizî sicuri di una fauna più schiettamente turoniana: così sembra mancare la rappresentanza del Senoniano inferiore, mentre è chiaramente rappresentato il superiore o Maestrichtiano. E il breve elenco di fossili del Sopracretacico non contraddice al concetto già acquisito circa le affinità, che, similmente a quelle su accennate per il Cenomaniano, collegano il Senoniano mediterraneo, e specialmente quello nord-africano, col Senoniano orientale.

Matematica. — *Sulla derivazione ad indice qualunque.* Nota della dottoressa ANGELA MARIA MOLINARI, presentata dal Corrisp. A. DI LEGGE [1].

Nelle mie Note precedenti [2] dopo aver definito, in modo che mi sembra utile e coerente con le regole del calcolo, l'operazione D^n, quando D rappresenti l'ordinaria derivazione $\frac{d}{dx}$, e l'indice n sia un numero qualunque, ed aver accennato alle soluzioni proposte dai diversi autori che hanno considerato il problema, ho esposto il concetto che la definizione di D^n, per quanto arbitraria, per rendersi utile, deve esser tale da soddisfare ad un insieme di condizioni più restrittive di quelle verificate dalle varie formule proposte, in particolare alla condizione $D^m D^n = D^{m+n} = D^n D^m$, e data una formula che vi soddisfa realmente.

Mi propongo di mostrare, in questa Nota, qualche applicazione.

[1] Pervenuta all'Accademia il 31 luglio 1917.

[2] Cfr. Molinari, *Derivazione ad indice qualunque*, Rend. Lincei (1916), vol. XXV, pp. (230-233) e pp. 268-273.

1°. Alle equazioni integrali tipo Abel, anche estese fra limiti infiniti.

Sia data

$$f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{u(\xi)}{(x-\xi)^{\lambda}}\, d\xi \qquad (0 < \lambda < 1)$$

dove $f(x)$ si annulli d'ordine sufficiente per $x = -\infty$). Allora

$$f(x) = \Gamma(-\lambda+1) \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-\xi)^{-\lambda}}{\Gamma(-\lambda+1)}\, u(\xi)\, d\xi\,,$$

ovvero, in virtù della formula

$$\mathrm{D}^{-n} f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{\Gamma(n)}\, f(\xi)\, d\xi\,,$$

quest'equazione può scriversi

$$f(x) = \Gamma(-\lambda+1)\, \mathrm{D}^{\lambda-1}\, u(x)\,;$$

dunque è soddisfatta dalla soluzione

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(-\lambda+1)}\, \mathrm{D}^{1-\lambda} f(x)$$

$$u(x) = \frac{\mathrm{D}}{\Gamma(-\lambda+1)}\, \mathrm{D}^{-\lambda} f(x)$$

$$u(x) = \frac{\mathrm{D}}{\Gamma(-\lambda+1)} \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-\xi)^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\, f(\xi)\, d\xi$$

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(-\lambda+1)\,\Gamma(\lambda)}\, \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{x} (x-\xi)^{\lambda-1} f(\xi)\, d\xi\,.$$

Ma poichè

$$\Gamma(-\lambda+1)\,\Gamma(\lambda) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \lambda\pi}\,,$$

avremo

$$u(x) = \frac{\operatorname{sen} \lambda\pi}{\pi}\, \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{x} (x-\xi)^{\lambda-1} f(\xi)\, d\xi\,,$$

e, nel caso che $f(x)$ si annulli addirittura fra $x = -\infty$ ed $x = a$, se ne ricava la formula di Abel.

Siamo dunque riusciti a trovare, in virtù di *un metodo*, la formula di Abel ed anche con una lieve generalizzazione.

2°. All'equazione del calore.

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial t}\,.$$

Se $u(x\,,t)$ è funzione tale che

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha\,\frac{\partial^{1/2} u}{\partial t^{1/2}} \tag{2}$$

dico che $u(x\,,t)$ soddisfa pure alla (1). Infatti, se u soddisfa alla (2), la quale è lineare, giacchè anche $\frac{\partial^{1/2} u}{\partial t^{1/2}}$ da noi definito è lineare, vi soddisfa anche $\frac{\partial u}{\partial x}$, e quindi

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x} = \alpha^2\,\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}}\,\frac{\partial u}{\partial x}\,;$$

da cui, tenendo conto della (2) e dell'eguaglianza $D^m D^n = D^{m+n}$, si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha^2\,\frac{\partial u}{\partial t}\,.$$

È da notare che la reciproca non è vera, perchè u potrebbe soddisfare alla (1) e non alla (2); tale sarebbe, per esempio, il caso in cui u fosse soluzione della

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\,\alpha\,\frac{\partial^{1/2} u}{\partial t^{1/2}}\,. \tag{2)'$$

È però facile verificare che combinando linearmente le soluzioni della (2) e della (2)′ si ottengono tutti gli integrali della (1).

Proponiamoci invece il problema: in una sbarra indefinita, nel senso delle x positive, sotto la condizione che u si annulli per $x = +\infty$ e che la (1) valga in tutta la sbarra, sia data arbitrariamente la successione $u_0(x)$ dei valori di u per $x = 0$ e per ogni valore di t a partire da $t = -\infty$; si vuol trovare la successione $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$ dei valori di $\frac{\partial u}{\partial x}$ per $x = 0$ e per ogni valore di t. Ovvero, dato all'origine, od in un punto qualsiasi, l'andamento dei valori della temperatura, trovare il gradiente della temperatura medesima, *senza risolvere l'equazione*, senza passare, cioè, per il tramite della formula che dà $u(x\,,t)$ in tutta la sbarra. Questo problema, d'importanza fisica e meteorologica ben conosciuta, si presenta anche negli studî del raffreddamento terrestre.

Le nostre formule, di derivazione frazionaria, conducono alla risoluzione in modo quasi immediato. Infatti, in virtù di tali formule, $\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}}$ si comporta come un moltiplicatore numerico e la soluzione della (1) assume così la forma simbolica

$$u = e^{-\alpha x\sqrt{\frac{d}{dt}}}\;u_0(t)\,,$$

la unica che soddisfi alle altre condizioni proposte. Dalla formula precedente avremo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\alpha \sqrt{\frac{d}{dt}}\, e^{-\alpha x \sqrt{\frac{d}{dt}}}\, u_0(t)$$

che diviene, per $x = 0$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = -\alpha \sqrt{\frac{d}{dt}}\, u_0(t)\,;$$

occorre dunque assumere u soluzione della (2)' anzichè della (2), ciò che si sarebbe potuto ammettere senz'altro. Sostituendo a $\sqrt{\frac{d}{dt}}\, u_0(t)$ la sua espressione, data dalle nostre formule, si ha la soluzione richiesta

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\tau=-\infty}^{\tau=t} \alpha \sqrt{\frac{1}{\pi(t-\tau)}}\, u_0(\tau)\, d\tau\,,$$

soluzione che coincide con quella che si ottiene cercando, con metodi noti, l'integrale $u(x, t)$ della (1) sotto le condizioni proposte, poi derivando e ponendo $x = 0$, procedimento, però, di gran lunga più laborioso.

Matematica. — *Soluzione di alcune equazioni del tipo di Abel.* Nota del dott. Pio Scalizzi S. J., presentata dal Corrispondente A. Di Legge [1].

Intendo proporre l'integrale generale di qualche equazione del tipo cosiddetto di Abel, della forma:

[1] $$\frac{dy}{dx} = \mathrm{A}y^3 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}y + \mathrm{D}$$

con A, B, C, D funzioni della sola x. Abel veramente studiò l'equazione [2]:

$$(z + s)\, dz + (p + qz + rz^2)\, dx = 0$$

con p, q, r, s funzioni della sola x, ma la si può ricondurre al tipo [1], posto:

$$z = \frac{1}{y+1} \qquad \mathrm{A} = \beta \qquad \mathrm{B} = \alpha + 3\beta \qquad \mathrm{C} = r + 2\alpha + 3\beta$$

$$\mathrm{D} = r + \alpha + \beta \qquad \alpha = q - 2rs - \frac{ds}{dx} \qquad \beta = p - qs + rs^2\,.$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1917.

[2] *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel*, nouvelle édition publiée par M. M. L. Sylow et S. Lie, Christiania.

Per le ipotesi che egli fa su questa equazione e sulla equazione canonica della [1]:

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x)\,\frac{1}{Z} + 1$$

per ogni speciale $\varphi(x)$ genialmente ricavata dalla stessa formazione del fattore integrante, non riesce a dare arbitrarietà altro che ad uno o a due coefficienti della [1].

Eulero [1] ha risolto alcune equazioni studiando il tipo canonico:

$$[2] \qquad \frac{dy}{dx} = \Phi_1\,\frac{1}{y} + \Phi_2$$

e dopo lui il Minding [2] che espone dei teoremi interessanti su certi moltiplicatori.

L'Elliot [3] servendosi dell'invarianza delle Φ_1 e Φ_2 per una trasformazione proiettiva, dà una soluzione che dipende da una data condizione e da un integral particolare radice di un'equazione troppo complicata.

Ad A. N. Korkine [4] è dovuta la completa soluzione della [2] quando possa essere soddisfatta dalle radici di un'equazione algebrica.

Lo stesso ha fatto il Koïalovicz [5] ma meno generalmente.

Anche l'Halphen [6] e il Darboux [7] studiano e risolvono equazioni particolari che possono ridursi alla forma [1].

Se si operano nella [1] le trasformazioni:

$$(\alpha) \qquad y = u + e^{\xi + \int [3Au^2 + 2Bu + C]\,dx} \qquad \text{e} \qquad \theta = e^{-\xi}$$

essendo u un integral particolare, si perviene facilmente al tipo canonico di Eulero:

$$[2]' \qquad \frac{d\theta}{dx} + \Phi_1\,\frac{1}{\theta} + \Phi_2 = 0$$

con

$$\Phi_1 = Ae^{2\int [3Au^2 + 2Bu + C]\,dx} \qquad \text{e} \qquad \Phi_2 = \{3Au + B\}\,e^{\int [3Au^2 + 2Bu + C]\,dx}.$$

[1] Eulero, *Novi Commentari*, Acad. Petrop., 17 (1772), éd. 1773, pag. 105.

[2] Dott. Ferd. Minding, *Beitrage zur Integration der differentialgleichungen erster ordnung*, Mémoires de l'Académie des sciences de St Péterbourg, VII série, tome V, n. 1, 1882.

[3] V. Z. Elliot, Annales de l'École Normale.

[4] Matematiche Annalen, 1897.

[5] M. Koïalovicz, *Recherches sur l'équation différentielle* $y\,dy - y\,dx = R(x)\,dx$, an. 1894.

[6] G. H. Halphen, C. R. Acc. sc. Paris, 88 (1879), pp. 417, 562.

[7] G. Darboux, *Théorie des surfaces*, 4, Paris, 1896.

Se si pone per ipotesi $\Phi_2 = 0$ dovrà essere

$$3Au + B = 0 \quad e \quad u = -\frac{B}{3A}$$

che sostituito nella prima equazione, darà:

$$\Phi_1 = Ae^{2\int\left\{C - \frac{B^2}{3A}\right\}dx}.$$

Dalla [2]' avremo immediatamente:

$$\theta = \sqrt{K - 2\int \Phi_1\, dx}$$

essendo K costante arbitraria.

D'altra parte per le trasformazioni (α) sarà:

$$\theta = \frac{e^{\int\left\{C - \frac{B^2}{3A}\right\}dx}}{y + \frac{B}{3A}}$$

sicchè dovrà essere:

$$\frac{e^{\int\left\{C - \frac{B^2}{3A}\right\}dx}}{y + \frac{B}{3A}} = \sqrt{K - 2\int Ae^{2\int\left\{C - \frac{B^2}{3A}\right\}dx} dx}$$

ossia:

$$y = \frac{e^{\int\left[C - \frac{B^2}{3A}\right]dx}}{\sqrt{K - 2\int Ae^{2\int\left\{C - \frac{B^2}{3A}\right\}dx} dx}} - \frac{B}{3A}.$$

Sicchè A, B, C restano funzioni indipendenti nella equazione integrata:

(I) $$y' = Ay^3 + By^2 + Cy + D_0$$

in cui però

$$D_0 = y_0' - Ay_0^3 - By_0^2 - Cy_0 \quad \text{con} \quad y_0 = -\frac{B}{3A}$$

quindi sarà

$$D_0 = \frac{d}{dx}\left[-\frac{B}{3A}\right] - \frac{B}{3A}\left[\frac{2}{9}\frac{B^2}{A} - C\right].$$

Se si pone nella (I) $B = 3$ si avrà:

$$y' = Ay^3 + 3y^2 + Cy - \frac{A'}{A^2} - \frac{1}{A}\left[\frac{2}{A} - C\right]. \tag{II}$$

Il cui I. G. è:

$$y = \frac{e^{\int\left(C - \frac{3}{A}\right)dx}}{\sqrt{K - 2\int Ae^{2\int\left\{C - \frac{3}{A}\right\}dx}dx}} - \frac{1}{A}.$$

Se si volesse arbitrario il termine noto, basterebbe trovare A che soddisfi all'equazione di Riccati:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{A}\right) - \frac{2}{A^2} - \frac{C}{A} = D$$

essendo D arbitrario. Sarà $\frac{1}{A} = f(u_1\,CD)$, significata con f la formola di risoluzione Riccatiana, con u_1 un integral particolare. L'equazione risolta sarebbe:

$$y' = f(u_1\,CD)^{-1}\,y^3 + 3y^2 + Cy + D \tag{III}$$

con l' I. G.

$$y = \frac{e^{\int[C - 3f(DC\,u_1)]\,dx}}{\sqrt{K - 2\int Ae^{2\int[C - 3f(DC\,u_1)]\,dx}dx}} - f(DC\,u_1).$$

Se si pone nella (I) $B = 3A$ avremo l'equazione:

$$y' = A\{y^3 + 3y^2 - 2\} + C\{y + 1\} \tag{IV}$$

con l' I. G.

$$y = \frac{e^{\int\{C - 3A\}\,dx}}{\sqrt{K - 2\int Ae^{2\int\{C - 3A\}\,dx}dx}} - 1.$$

Posto ancora nella (II) $A = 2$ si ottiene ancora:

$$y' = 2y^3 + 3y^2 + Cy - \frac{1}{2}(1 - C) \tag{V}$$

con l' I. G.

$$y = \frac{e^{\int \left\{ C - \frac{3}{2} \right\} dx}}{\sqrt{K - 4 \int e^{2 \int \left[C - \frac{3}{2} \right] dx} dx}} - \frac{1}{2},$$

da ultimo posto $A = 1$, $C = f(x)$ nella (IV), avremo:

$$\text{(VI)} \qquad y' = y^3 + 3y^2 + f(x)(y + 1) - 2$$

con l' I. G.

$$y = \frac{e^{\int [f(x) - 3] dx}}{\sqrt{K - 2 \int e^{2 \int [f(x) - 3] dx} dx}} - 1.$$

Per riprova verifichiamo l' I. G. dell' ultima equazione posta, per semplificare, $f(x) = 3$. La (VI) diviene:

$$y' = y^3 + 3(y^2 + y) + 1 \quad \text{sarà} \quad y = \frac{1}{\sqrt{K - 2x}} - 1.$$

Fatto $\sqrt{K - 2x} = \varphi$, sostituendo questo valore della y e moltiplicando tutto per φ^3, avremo l' identità:

$$1 = 1 - 3\varphi + 3\varphi^2 - \varphi^3 + 3\varphi - 6\varphi^2 + 3\varphi^3 + 3\varphi^2 - 3\varphi^3 + \varphi^3.$$

Chimica tecnologica. — *Saggi sui combustibili fossili italiani* (1). Nota I di Giovanni Sani, presentata dal Socio Körner (2).

Con la presente Nota io intendo di riservarmi lo studio che ho in corso ed i cui risultati pubblicherò prossimamente, sullo stato chimico di alcuni fra i principali elementi che costituiscono i combustibili fossili italiani; sul rapporto qualitativo e quantitativo fra i materiali disciolti con opportuni solventi da questi, come tali o previamente sottoposti a processi idrolittici, ed i prodotti ottenuti per la loro distillazione operata in differenti condizioni; nonchè sui residui delle diverse manipolazioni sopraindicate.

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica agraria del R. Istituto agrario superiore di Perugia.

(2) Pervenuta all'Accademia il 28 luglio 1917.