ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Geodesia. — *Geometria delle superficie e geometria della sfera.* Nota del Socio P. Pizzetti [1].

1. In una interessante Memoria pubblicata recentemente nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo [2] il consocio prof. Severi, allo scopo di dedurre talune espressioni della misura della curvatura di una superficie, ha acutamente instituito il confronto fra le proprietà metriche di una figura descritta sopra una superficie regolare qualunque e quelle di corrispondenti figure sopra una sfera di raggio opportunamente scelto. Una tale pubblicazione mi porge occasione di esporre qui alcune semplici formole, le quali si riattaccano ad argomenti da me trattati in questi Rendiconti nel 1906 e, poco prima, nelle Memorie dell'Accademia di Torino [3]. L'oggetto di quei miei studî era in qualche modo affine a quello del prof. Severi, con questa diversità che mentre a Lui era sufficiente (come ricerca sussidiaria o intermedia) di indagare l'ordine di grandezza infinitesimale della differenza fra gli elementi delle figure superficiali e di quelle sferiche (considerate come infinitesime di 1° ordine le dimensioni lineari delle figure stesse) nel mio caso, dal punto di vista delle applicazioni numeriche alla Geodesia, interes-

[1] Pervenuta all'Accademia l'11 agosto 1917.

[2] F. Severi, *Sulla curvatura delle superficie e varietà*, Rend. Circ. Mat. Palermo, tomo XLII, anno 1917.

[3] *Paragone fra gli angoli di due triangoli geodetici di eguali lati*, Note I e II; *Corollario del teorema relativo al paragone* etc., questi Rendiconti, 1° semestre 1906; *Intorno al grado di approssimazione nella risoluzione dei triangoli geodetici*, Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino, 1905.

sava cercare un *limite superiore* delle differenze surricordate. Ho potuto così stabilire alcune formole, che, opportunamente sviluppate, possono condurre ad una, dirò così, geòmetria di limitazione delle proprietà metriche di una figura descritta su di una superficie qualunque, per mezzo del confronto di questa con due *sfere* le cui curvature siano uguali alla massima e alla minima curvatura della superficie, nella regione che si considera. Di quelle formole fondamentali io mi limitai a dedurre le conseguenze che interessano la Geodesia, ossia i limiti entro cui sono comprese le grandezze degli angoli di un triangolo geodetico di cui siano assegnati i lati. In particolare, come cosa d'interesse teorico, dedussi i limiti fra i quali è compreso il così detto *angolo di parallelismo* sopra una superficie qualsiasi a curvatura negativa (finita).

Riprendo ora quelle formole per determinare i limiti superiori delle differenze fra le figure sferiche e le superficiali in alcuni dei casi trattati dal prof. Severi.

2. Riferiti i punti di una superficie qualunque S ad un sistema di coordinate polari geodetiche, aventi per polo un punto P della superficie, il quadrato dell'elemento lineare è espresso da

$$ds^2 = d\varrho^2 + \mathrm{G}\, d\theta^2$$

dove ϱ e θ sono il raggio vettore geodetico e l'anomalia. Posto $g = \sqrt{\mathrm{G}}$ (il radicale preso positivamente) e indicata con K la misura della curvatura della superficie nel punto generico, si ha

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{K} = -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial \varrho^2}, \\ &g_0 = 0 \;, \quad \left(\frac{\partial g}{\partial \varrho}\right)_0 = 1 \end{aligned} \right.$$

ove l'indice 0 si riferisce al polo P ($\varrho = 0$).

Indicando con R una quantità qualunque reale od immaginaria, le tre formole (1) possono compendiarsi nell'unica equazione integrale

$$(2) \qquad g = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\frac{\varrho}{\mathrm{R}} + \mathrm{R}\int_0^\varrho g_x\left(\frac{1}{\mathrm{R}^2} - \mathrm{K}_x\right)\mathrm{sen}\,\frac{\varrho - x}{\mathrm{R}}\,dx\,,$$

ove con g_x e K_x si intendono le espressioni di g e K, nelle quali in luogo della lettera ϱ si ponga la x. In particolare, posto $\mathrm{R} = \infty$, si ha

$$(2') \qquad g = \varrho - \int_0^\varrho g_x \mathrm{K}_x (\varrho - x)\, dx\,.$$

Dalle (2) (2') si deducono le seguenti principali conseguenze, che mi permetto di ricordare:

1°. Se la curvatura K non supera il valore positivo K_1, la g risulta positiva, a partire dal polo, sopra ogni geodetica uscente da esso, per un arco di lunghezza *almeno uguale* a $\pi/\sqrt{K_1}$. Resta così limitata, intorno a P, una calotta superficiale entro la quale due geodetiche uscenti da P non hanno alcun altro punto in comune. Ad una tale regione intenderemo limitate le cose che seguono.

2°. Se la curvatura K è ovunque positiva, si ha in ogni punto

$$g < \varrho .$$

3°. Se, detta K_0 la curvatura nel punto P, si ha

$$|K - K_0| < h\varrho ,$$

ove h è quantità positiva, si deduce dalla (2) ponendovi $R = 1/\sqrt{K_0}$:

$$\left| g - \frac{1}{\sqrt{K_0}} \operatorname{sen} . \varrho \sqrt{K_0} \right| < \frac{h\varrho^4}{12} . \tag{3}$$

Questa relazione dà il limite superiore dell'errore che si commette quando all'espressione di $\sqrt{G}$, relativa alla superficie considerata, si sostituisca, per approssimazione, la corrispondente espressione per la sfera la cui curvatura eguaglia la curvatura della superficie in P. [Ad esempio: per l'ellissoide di rotazione schiacciato, chiamando a ed e il raggio dell'equatore e la eccentricità, φ la latitudine, α l'azimut della geodetica ϱ, si ha

$$\frac{dK}{d\varrho} = \frac{-2e^2}{a^3(1-e^2)^2}(1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{5/2} \operatorname{sen} 2\varphi \cos \alpha .$$

Possiamo quindi assumere

$$h = \frac{2e^2}{a^3(1-e^2)^2} = \frac{1}{75 . a^3}$$

ove si attribuisca ad e il valore proprio dell'ellissoide terrestre].

3. Indichiamo, per brevità, con S_0 la sfera testè considerata, il cui raggio è $1/\sqrt{K_0}$. Scelto sulla S_0 un punto arbitrario come polo di coordinate polari geodetiche, stabiliamo fra i punti della S_0 e quelli della superficie S la corrispondenza biunivoca per uguali valori di ϱ e θ nei punti corrispondenti, e cerchiamo un limite superiore della differenza fra la lunghezza s di un arco finito della S e quella della linea corrisp. della sfera.

Posto $\frac{d\theta}{d\varrho} = t$, supponendo per semplicità che lungo l'arco considerato l'anomalia θ varii sempre in un senso fra i valori θ_1 e θ_2, avremo sulla S:

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + g^2 t^2} \, \frac{d\theta}{t} .$$

E sulla sfera, ponendo per brevità $\bar{g}$ in luogo di $\frac{1}{\sqrt{K_0}}$ sen $\varrho\sqrt{K_0}$:

$$\bar{s} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1+\bar{g}^2 t^2}\, \frac{d\theta}{t}$$

Indicando con g_m un valore intermedio fra g e $\bar{g}$, avremo

$$\sqrt{1+g^2 t^2} - \sqrt{1+\bar{g}^2 t^2} = \frac{g_m t^2}{\sqrt{1+g_m^2 t^2}} (g - \bar{g}) = Ct(g - \bar{g})$$

dove

(4) $$|C| = \left| \frac{g_m t}{\sqrt{1+g_m^2 t^2}} \right| < 1 .$$

Quindi

$$s - \bar{s} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} C(g - \bar{g})\, d\theta ,$$

e ricordando le (3) e (4)

$$|s - \bar{s}| < \frac{h\varrho_m^4}{12} (\theta_2 - \theta_1)$$

ove con ϱ_m si indichi il massimo valore che assume il raggio geodetico ϱ lungo la linea che si considera.

(Nel caso dell'ellissoide terrestre, supposto $\varrho_m \leqq 300$ chilometri e $\theta_2 - \theta_1 = 2\pi$, si ha $s - \bar{s} < \frac{\varrho_m}{1400000}$).

4. Cerchiamo anche un limite superiore delle differenze fra due angoli corrispondenti sulle due superficie, nella stabilita corrispondenza biunivoca. Chiamiamo α l'angolo che una linea sulla S in un suo punto fa col raggio geodetico ϱ. Sarà

$$\text{tang}\, \alpha = g \frac{d\theta}{d\varrho} .$$

E per l'angolo corrispondente sulla sfera

$$\text{tang}\, \bar{\alpha} = \bar{g} \frac{d\theta}{d\varrho} .$$

Posto, come sopra, $\frac{d\theta}{d\varrho} = t$, avremo

(5) $$\text{tang}\,(\alpha - \bar{\alpha}) = \frac{(g - \bar{g})\, t}{1 + g\bar{g} t^2} .$$

Il valore massimo assoluto del rapporto $\frac{t}{1+g\bar{g}t^2}$ (per valori reali di t) si ha per $t = 1/\sqrt{g\bar{g}}$, con che il valore massimo del 2° membro della (5) risulta

$$\frac{|g-\bar{g}|}{2\sqrt{g\bar{g}}}.$$

Indicando, come sopra, con K_1 il valor massimo della curvatura K di S, si deduce facilmente dalla (2) (ponendovi $R = 1/\sqrt{K_1}$)

$$g \geq \frac{1}{\sqrt{K_1}} \operatorname{sen}.\varrho\sqrt{K_1}.$$

Lo stesso limite inferiore varrà per $\bar{g}$. Abbiamo quindi, in definitivo, dalla (5) ricordando la (3)

$$|\operatorname{tg}(\alpha-\bar{\alpha})| < \frac{h\varrho^3}{24}\left(\frac{\varrho\sqrt{K_1}}{\operatorname{sen}.\varrho\sqrt{K_1}}\right)$$

ove il fattore entro parentesi risulta finito nella regione limitata che consideriamo.

(Posto $\varrho = 300$ Km., con che il fattore, ora detto, risulta minore di 2, si ha per l'ellissoide terrestre

$$|\operatorname{tg}(\alpha-\bar{\alpha})| < \frac{1}{8500000}$$

dove

$$\alpha - \bar{\alpha} < 0'',024).$$

5. Con metodo analogo a quello tenuto nei precedenti paragrafi, si può instituire il confronto fra la superficie qualunque e la sfera anche quando si faccia uso di altri sistemi di coordinate curvilinee, e quindi di altre specie di corrispondenza biunivoca.

Assumiamo, in particolare, come linee $v =$ cost le geodetiche che tagliano sotto angoli (corrispondenti) eguali ω una geodetica fissa C e per linee $u =$ cost i luoghi degli estremi di archi uguali misurati sulle dette geodetiche a partire da C, ossia, per usare la locuzione del Severi, le linee di equidistanza obliqua, secondo l'angolo ω, dalla C.

L'espressione del quadrato dell'elemento lineare è allora, come risulta da elementari considerazioni di Geometria differenziale:

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + G\, dv^2.$$

Se v esprime l'arco della curva base C, si ha $G = 1$ e quindi $\frac{\partial G}{dv} = 0$ sulla curva C, ossia per $u = 0$. Di più, per essere geodetica la C, sarà pure

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 0 \qquad \text{per } u = 0\,. \tag{6}$$

Posto

$$\varDelta = G - \cos^2 \omega\,, \tag{7}$$

la misura della curvatura della superficie nel punto generico è espressa da

$$K = -\frac{1}{2\varDelta}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{1}{4\varDelta^2}\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 = -\frac{1}{2\varDelta}\frac{\partial^2 \varDelta}{\partial u^2} + \frac{1}{4\varDelta^2}\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial u}\right)^2,$$

ovvero da

$$K = -\frac{1}{\sqrt{\varDelta}}\frac{\partial^2 \sqrt{\varDelta}}{\partial u^2}\,. \tag{8}$$

Dalle (6) (7) risulta poi

$$\left\{\begin{aligned} &\varDelta = \operatorname{sen}^2 \omega\,, \quad \frac{\partial \sqrt{\varDelta}}{\partial u} = 0 \\ &K = -\frac{1}{2 \operatorname{sen}^2 \omega}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \end{aligned}\right. \qquad \text{per } u = 0\,. \tag{9}$$

6. Osserveremo, di passata, che l'espressione della curvatura data dal Severi nella pag. 19 della sua Memoria, può dedursi subito dalle precedenti formole.

Sia infatti il quadrilatero $P Q P' Q'$ costituito da un arco di geodetica PQ, da due archi geodetici (uguali) PP', QQ' che facciano, dalla stessa banda, l'angolo ω colla PQ, e dalla linea di equidistanza $P'Q'$. Indichiamo con $(0,0)$, $(0,\delta v)$, $(\delta u, 0)$, $(\delta u, \delta v)$ le coordinate rispettive dei punti P, Q, P', Q' nel sistema di coordinate considerate nel paragrafo precedente, ove la PQ si assuma come curva base. Avremo:

$$PQ^2 = (\delta v)^2$$

$$P'Q'^2 = G(\delta v)^2 = \left\{ 1 + \delta u \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)_0 + \frac{\delta u^2}{2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right)_0 \right\} (\delta v)^2$$

ovvero, per le (6) e (9)

$$P'Q'^2 = \{ 1 - K(\delta u)^2 \operatorname{sen}^2 \omega \} (\delta v)^2$$

donde

$$K = \lim \frac{PQ^2 - P'Q'^2}{\varDelta^2}\,,$$

essendo $\varDelta$ l'area del parallelogrammo $P Q P' Q'$.

Un'altra espressione limite della K può ottenersi considerando l'angolo Ω che la geodetica v, uscente dal punto generico P della curva base C, fa, nel suo punto generico P', colla linea di equidistanza obliqua uscente da P'.

Avremo

$$\cos \Omega = \frac{\cos \omega}{\sqrt{G}} . \tag{10}$$

E collo sviluppo in serie di Taylor, posto $PP' = \delta u$

$$\Omega = \omega + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial u}\right)_0 \delta u + \frac{(\delta u)^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u^2}\right)_0 .$$

Deducendo dalla (10) le espressioni delle derivate di Ω e ricordando le (6) e (9), si trova senza difficoltà

$$K = \lim \frac{4(\omega - \Omega)}{PP'^2 . \operatorname{sen} 2\omega} .$$

7. Ritorniamo al caso di figure di dimensioni finite. La equazione differenziale (8) e le prime due equazioni (9) possono compendiarsi nell' unica equazione integrale

$$\sqrt{\Delta} = \operatorname{sen} \omega \cos \frac{u}{R} + R \int_0^u \sqrt{\Delta_x} \left(\frac{1}{R^2} - K_x\right) \operatorname{sen} \frac{u - x}{R} \, dx , \tag{11}$$

ove R è quantità affatto arbitraria, In particolare

$$\sqrt{\Delta} = \operatorname{sen} \omega - \int_0^u \sqrt{\Delta_x} \, K_x (u - x) \, dx . \tag{11'}$$

Qui, come nel § 2, con K_x e Δ_x si intendono le espressioni di K e Δ ove alla lettera u si sostituisca la lettera x.

Se K_1 è limite superiore della curvatura K, ponendo nella (11) $R = 1/\sqrt{K_1}$, si trova che $\sqrt{\Delta}$ non può annullarsi per valori di u inferiori a $\pi/2\sqrt{K_1}$. Il che è quanto dire che: *sopra ciascuna delle considerate geodetiche (u) uscenti dai punti della C, l'arco compreso fra la C e l'inviluppo delle geodetiche stesse è per lo meno uguale a* $\pi/2\sqrt{K_1}$.

Dalla (16') si deduce poi che, se la curvatura della superficie è dappertutto positiva, nella regione ora considerata nella quale $\sqrt{\Delta}$ non si annulla, si ha

$$\sqrt{\Delta} < \operatorname{sen} \omega \text{ [1]}.$$

[1] Più generalmente se K assume valori negativi colla limitazione $K > -\frac{1}{R^2}$, si ha facilmente dalla (11):

$$\sqrt{\Delta} < \frac{1}{2} \operatorname{sen} \omega \, (e^{u/R} + e^{-u/R}).$$

Poniamo ora nella (11) $R = 1/\sqrt{K_0}$ dove K_0 è la curvatura della superficie in un punto P della curva C, e supponiamo che, a distanza geodetica u da P, il valore della curvatura K soddisfaccia alla diseguaglianza

$$|K - K_0| < hu,$$

ove h è quantità finita positiva. Allora dalla (11) si deduce senza difficoltà

$$(12) \qquad \left|\sqrt{\Delta} - \operatorname{sen}\omega \cos u \sqrt{K_0}\right| < \frac{hu^3}{6} \operatorname{sen}\omega .$$

È facile dedurre di qui un limite superiore della differenza fra $\sqrt{G}$ e l'espressione corrispondente $\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\omega \operatorname{sen}^2 u\sqrt{K_0}}$ per la sfera la cui curvatura è uguale a K_0.

Infatti dalle due uguaglianze

$$\sqrt{a - b} = \sqrt{a_0 - b} + \varepsilon$$
$$\sqrt{a} \quad = \sqrt{a_0} \quad + \eta ,$$

ove $a, a_0, b, \varepsilon, \eta$ sono quantità reali qualunque, si deduce tosto

$$\eta^2 + 2\eta\sqrt{a_0} = \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{a_0 - b} ,$$

e quindi

$$|\eta| < \frac{\varepsilon^2 + 2|\varepsilon|\sqrt{a_0 - b}}{2\sqrt{a_0}} .$$

Ricordando che $\Delta = G - \cos^2\omega$, si deduce così dalla (12)

$$(13) \qquad \left|\sqrt{G} - \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\omega \operatorname{sen}^2 u\sqrt{K_0}}\right| < \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon \operatorname{sen}\omega \cos u\sqrt{K_0}}{2\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\omega \operatorname{sen}^2 u\sqrt{K_0}}}$$

ove

$$(14) \qquad \varepsilon = \frac{hu^3}{b} \operatorname{sen}\omega .$$

Se ora si considerano sulla linea di equidistanza u due punti M, N di coordinate (u, v_1) (u, v_2) si avrà sulla superficie S

$$\text{arco } MN = \int_{v_1}^{v_2} \sqrt{G}\, dv .$$

E sulla sfera l'arco corrispondente $M N_1$ sarà espresso da

$$\text{arco } M_1 N_1 = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\omega \operatorname{sen}^2 u\sqrt{K_0}}\,(v_2 - v_1) .$$

La differenza fra i due archi è quindi

$$< \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon \operatorname{sen}\omega \cos u\sqrt{K_0}}{2\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\omega \operatorname{sen}^2 u\sqrt{K_0}}}\,(v_2 - v_1) ,$$

ove ε è data dalla (14).