ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

Matematica. — *Ricerche sulle congruenze di sfere e sul rotolamento di superficie applicabili.* Memoria del Socio L. Bianchi.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie.*

Matematica. — *Le serie di funzioni sommate col metodo di Borel generalizzato.* Nota di Gustavo Sannia, presentata dal Socio Enrico D'Ovidio [1].

1. In una Memoria di prossima pubblicazione [2], della quale ho dato un sunto in una recente Nota [3], ho esposto un metodo di sommazione delle serie che è di grandissima potenza e che tuttavia ammette tutto l'algoritmo delle serie assolutamente convergenti.

In questa Nota mi propongo di applicarlo alle *serie di funzioni*

$$u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots \tag{1}$$

2. Consideriamo perciò la *serie associata di ordine* r alla (1) (M, n. 5; N, n. 1)

$$u^{(r)}(\alpha\,,x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_{n+r}(x)\,\frac{\alpha^n}{n\,!} \tag{2}$$

che si può scrivere per un intero r qualunque (anche negativo), perchè assumiamo, per convenzione, $u_n(x)=0$ per $n<0$. Supporremo $\alpha\geq 0$.

Allorchè per tutti i numeri x di un intervallo $(a\,,b)$ la (2) è una trascendente intera in α e l'integrale improprio

$$\int_0^\infty e^{-\alpha}\,u^{(r)}(\alpha\,,x)\,d\alpha \tag{3}$$

è convergente, diremo (M, n. 9; N, n. 1) che la serie (1) *è sommabile col metodo di Borel di ordine* r [4] nell'intervallo; e diremo *somma* della

[1] Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1917.

[2] *Nuovo metodo di sommazione delle serie, estensione del metodo di Borel* (comparirà nei Rend. del Circolo mat. di Palermo. Premetteremo una M alle citazioni del testo che si riferiscono a questa Memoria.

[3] *Generalizzazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie* (questi Atti, vol. XXVI, serie 5ª, 1° sem., fasc. 11°). Premetteremo una N alle citazioni del testo che si riferiscono a questa Nota.

[4] E scriveremo *è sommabile* $(B\,,r)$.

serie l'espressione

$$u(x) = \mathrm{U}_{r-1}(x) + \int_0^\infty e^{-\alpha} u^{(r)}(\alpha, x)\, d\alpha, \tag{4}$$

ove

$$\mathrm{U}_{r-1}(x) = 0, \text{ se } r \leq 0 \text{ e } \mathrm{U}_{r-1}(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_{r-1}(x), \text{ se } r > 0.$$

Che se poi la detta convergenza della serie (2) per ogni $\alpha \geq 0$ e dell'integrale (3) è uniforme nell'intervallo (a, b), diremo che la serie (1) è sommabile (B, r) *uniformemente* nell'intervallo.

3. Il concetto di *sommabilità* (B, r) è una estensione del concetto di convergenza [1]. Ora vogliamo dimostrare che la sommabilità (B, r) *uniforme* è una estensione del noto concetto di convergenza uniforme, almeno per la serie di funzioni limitate. Precisamente:

TEOREMA. — *Ogni serie* (1) *di funzioni limitate in un intervallo* (a, b) *che in esso sia uniformemente convergente con somma* $u(x)$ *è anche sommabile* (B, r) *uniformemente in* (a, b) *e con ugual somma (qualunque sia* r*)*.

Per ipotesi, $\mathrm{U}_n(x)$, definita dalle (5), tende ad $u(x)$ uniformemente in (a, b); ciò vuol dire che: dato un numero $\varepsilon > 0$, esiste un numero intero m *indipendente da* x (e che supporremo maggiore del valore assoluto di $r - 1$), tale che risulti

$$|\mathrm{U}_{n+r-1}(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{per} \quad n \geq m \quad \text{e} \quad a \leq x \leq b. \tag{6}$$

Ne segue che, essendo

$$e^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \tag{7}$$

una trascendente intera, tale sarà pure la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} [\mathrm{U}_{n+r-1}(x) - u(x)] \frac{\alpha^n}{n!}, \tag{8}$$

la quale sarà, inoltre, uniformemente convergente in (a, b) per ogni $\alpha \geq 0$. E delle stesse proprietà godrà la serie

$$\mathrm{U}^{(r-1)}(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{U}_{n+r-1}(x) \frac{\alpha^n}{n!}. \tag{9}$$

[1] Poichè *ogni serie convergente è sommabile* (B, r) *e con ugual somma* (M, n. 10; N. n. 2).

Ne segue che la somma della serie (8) sarà $U^{(r-1)}(\alpha, x) - e^{\alpha} u(x)$ e che quindi si avrà

$$e^{-\alpha} U^{(r-1)}(\alpha, x) - u(x) = e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} [U_{n+r-1} - u(x)] \frac{\alpha^n}{n!};$$

da cui

$$(10) \qquad \left| e^{-\alpha} U^{(r-1)}(x) - u(x) \right| \leq e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{m-1} \left| U_{n+r-1}(x) - u(x) \right| \frac{\alpha^n}{n!} + \\ + e^{-\alpha} \sum_{n=m}^{\infty} \left| U_{n+r-1}(x) - u(x) \right| \frac{\alpha^n}{n!},$$

ove m è il numero poc'anzi definito.

Poichè, per ipotesi, i termini $u_n(x)$ della serie (1) sono funzioni limitate in (a, b), tale sarà pure la funzione $U_{n+r-1}(x)$ (5); inoltre, per la (6), anche la funzione $u(x) - U_{n+r-1}(x)$ è limitata per $r \geq m$; dunque sarà pure limitata la funzione $u(x)$. Quindi, infine, saranno limitate le funzioni

$$U_{n+r-1}(x) - u(x) \qquad (n = 0, 1, \ldots, m-1);$$

sicchè esisterà una costante positiva K maggiore dei moduli di queste funzioni in (a, b).

Per ciò e pel fatto che, dalla (6), si ha

$$\sum_{n=m}^{\infty} \left| U_{n+r-1}(x) - u(x) \right| \frac{\alpha^n}{n!} < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} < \frac{\varepsilon}{2} e^{\alpha}, \quad (a \leq x \leq b)$$

la (10) dà

$$(11) \qquad \left| e^{-\alpha} U^{(r-1)}(x) - u(x) \right| \leq K e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\alpha^n}{n!} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Intanto, per il teorema di l'Hospital,

$$\lim_{\alpha=\infty} e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\alpha^n}{n!} = 0,$$

quindi esiste una costante $h > 0$, tale che risulti

$$e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\alpha^n}{n!} < \frac{\varepsilon}{2K} \quad \text{per} \quad \alpha > h.$$

In conseguenza, la (11) dà

$$\left| e^{-\alpha} U^{(r-1)}(\alpha, x) - u(x) \right| < \varepsilon \quad \text{per} \quad \alpha > h \quad \text{e} \quad a \leq x \leq b.$$

Ciò dimostra che

$$(12) \qquad \lim_{\alpha=\infty} e^{-\alpha} U^{(r-1)}(\alpha, x) = u(x) \quad \text{uniformemente in } (a, b).$$

Ora osserviamo che la serie di funzioni di x (2) è uniformemente convergente in (a, b) per $\alpha \geq 0$, poichè può dedursi dalla (1), che è ivi uniformemente convergente per ipotesi, moltiplicandone i termini per i fattori positivi $\frac{\alpha^n}{n!}$ che, a partire da un certo n, sono minori di 1.

Ricordiamo, inoltre, la relazione identica (M, n. 6) facile a verificare

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-\alpha}\,\mathrm{U}^{(r-1)}(\alpha, x)\right] = e^{-\alpha}\,u^{(r)}(\alpha, x).$$

Integrandola tra i limiti 0 ed α ed osservando che, per la (9), è

$$\mathrm{U}^{(r-1)}(0, x) = \mathrm{U}_{r-1}(x),$$

si trae che

$$e^{-\alpha}\,\mathrm{U}^{(r-1)}(\alpha, x) = \mathrm{U}_{r-1}(x) + \int_0^\alpha e^{-\alpha} u^{(r)}(\alpha, x)\,d\alpha. \tag{13}$$

Per la (12), il secondo membro tende, come il primo, uniformemente ad $u(x)$ per $\alpha = \infty$, perciò l'integrale (3) è uniformemente convergente in (a, b) e sussiste la (4). Dunque la (1) è sommabile (B, r) uniformemente in (a, b) e con somma $u(x)$.

3. Tutti i teoremi noti sulle serie uniformemente convergenti si lasciano estendere alle serie sommabili (B, r) uniformemente.

I. *Se una serie di funzioni* (1) *è sommabile uniformemente in un intervallo* (a, b) *e se in un punto* $x = c$ *dell'intervallo i suoi termini sono funzioni continue, ivi anche la somma* $u(x)$ *della serie è funzione continua.*

Giusta l'ipotesi, la serie (2) è costituita da funzioni continue per $x = c$ ed è uniformemente convergente in (a, b) per ogni $\alpha \geq 0$, quindi anche la sua somma $u^{(r)}(\alpha, x)$ è funzione continua per $x = c$ e per ogni $\alpha \geq 0$.

Da ciò e dalla uniforme convergenza dell'integrale (3) in (a, b) (che pure discende dall'ipotesi) segue che anche detto integrale è funzione continua per $x = c$. E poichè tale è pure $\mathrm{U}_{r-1}(x)$ (5), ne risulta, per la (4), che anche la somma della serie è funzione continua per $x = c$.

II. *Se una serie di funzioni integrabili è sommabile* (B, r) *uniformemente in un intervallo* (a, b) *con somma* $u(x)$, *la serie formata dagli integrali dei suoi termini fra i limiti* c_1 *e* c_2 $(a \leq c_1 < c_2 \leq b)$ *è sommabile* (B, r) *ed ha per somma l'analogo integrale di* $u(x)$. *In tal senso si può scrivere:*

$$\int_{c_1}^{c_2} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{c_1}^{c_2} u_n(x)\,dx.$$

Per ipotesi, la serie (2) è uniformemente convergente in (a, b) per ogni $\alpha \geq 0$, quindi è integrabile termine a termine, dando luogo ad una serie convergente per ogni $\alpha \geq 0$. Posto

$$\int_{c_1}^{c_2} u^{(r)}(\alpha, x)\,dx = j(\alpha) \quad , \quad \int_{c_1}^{c_2} u_n(x)\,dx = j_n$$

si ha quindi la serie

$$j^{(r)}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty} j_{n+r}\,\frac{\alpha^n}{n\,!};$$

che è la serie associata di ordine r alla serie (numerica) $\sum j_n$.

Segue inoltre dall'ipotesi che l'integrale (3) è uniformemente convergente in (a, b), quindi è lecito scrivere

$$(14)\qquad \int_{c_1}^{c_2} dx \int_0^{\infty} e^{-\alpha}\, u^{(r)}(\alpha , x)\, d\alpha =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\alpha} d\alpha \int_{c_1}^{c_2} u^{(r)}(\alpha , x)\, dx = \int_0^{\infty} e^{-\alpha} j^{(r)}(\alpha)\, d\alpha$$

e l'ultimo integrale è convergente.

Infine, per la (5),

$$(15)\qquad \int_{c_1}^{c_2} \mathrm{U}_{r-1}(x)\, dx = \mathrm{J}_{r-1}$$

ove

$$\mathrm{J}_{r-1}=0 \quad \text{se} \quad r \leq 0 \quad \text{e} \quad \mathrm{J}_{r-1}=j_0+j_1+\cdots+j_{r-1} \quad \text{se} \quad r>0 .$$

Dalle (14) e (15) segue che esiste l'integrale del secondo membro della (4) e quindi anche quello j del primo e che si ha

$$j=\mathrm{J}_{r-1}+\int_0^{\infty} e^{-\alpha} j^{(r)}(\alpha)\, d\alpha ,$$

il che prova che la serie $\sum j_n$ è sommabile (B, r) con somma j.

III. *Se una serie* (1) *di funzioni derivabili è sommabile* (B, r) *in un intervallo* (a, b) *e se ivi è sommabile* (B, r) *uniformemente la serie formata dalle derivate dei suoi termini, la somma di questa serie è la derivata della somma della prima. In tal senso si può scrivere*:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{du_n(x)}{dx} .$$

Si dimostra, come l'analogo teorema sulle serie di funzieni sommate col metodo ordinario, applicando il teorema II alle serie delle derivate.