ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

diante deformazioni elastiche, dovrebbe dirsi, relativamente alla teoria delle Distorsioni, non già che essa considera stati d'equilibrio di corpi i quali ammettono uno stato S_0 in cui nessuna particella è soggetta a tensione; ma che essa insegna a costruire, con speciali procedimenti, dei corpi nei quali si hanno sempre, anche se le forze esterne sono nulle, tensioni interne diverse da zero; ed esamina gli stati d'equilibrio che questi corpi assumono in assenza di forze esterne.

Matematica. — *Osservazioni sui punti singolari delle curve multiple di una superficie algebrica.* Nota del dott. OSCAR CHISINI, presentata dal Corrispondente F. ENRIQUES [1].

1. In questa Nota mi propongo di svolgere alcune osservazioni critiche relative ai punti singolari che si possono presentare sopra una curva multipla per una superficie algebrica $f(x\,y\,z)=0$, avendo speciale riguardo all'abbassamento che questi producono sul genere e sulla classe delle sezioni piane o in generale superficiali; di queste osservazioni, alcune delle quali forse nuove e inaspettate, sembra necessario tener conto ove si voglia procedere con rigore nella delicata questione dell'analisi e della risoluzione delle singolarità di una superficie.

2. Per chiarezza cominciamo con l'osservare che sopra la curva, C, multipla per la superficie f (curva che può essere composta di più parti irriducibili dotate anche di diversa molteplicità) un punto, P, che sia semplice per la C, non deve ritenersi singolare per f, ove non abbassi la classe delle sezioni piane per esso, riuscendo punto base per il sistema delle curve L segate sopra la superficie f dalle sue polari, fuori della curva multipla C. Questa veduta tiene ad un noto teorema di Halphen sulla rappresentabilità di ciascuna falda della superficie f nell'intorno di un punto generico della curva multipla mediante serie: precisamente se ν è l'ordine della falda e $y=\Sigma a_i x^i$ lo sviluppo in serie della proiezione della curva C nell'intorno di P, si ha

$$z=\Sigma\Sigma a_{ik}\,x^i\,t^k$$
$$x=x\ ,\ y=t^\nu+\Sigma a_i\,x^i\,.$$

La dimostrazione più semplice di questo teorema si ha osservando che la sostituzione $y=t^\nu+\Sigma a_i\,x^i$ trasforma la superficie $f(x\,y\,z)=0$ in un'altra $f'(x\,t\,z)=0$ per cui z riesce funzione monodroma di x e t in corrispondenza alla falda d'ordine ν considerata, almeno se per il punto P

[1] Pervenuta all'Accademia il 30 giugno 1917.

non passava altra curva attraverso la quale si scambiassero due valori di z appartenenti alla nostra falda, il che può sempre supporsi — sciegliendo convenientemente gli assi — ove il punto semplice P non sia base per le curve L.

3. Un punto P, semplice per la curva multipla C, che sia base per le curve polari L, abbassa certo la classe delle sezioni piane passanti per esso, ma non in generale il genere; tuttavia nell'intorno (del prim'ordine o d'ordine superiore) di P vi è qualche punto che abbassa il genere delle sezioni superficiali obbligati a contenerlo, il che si riconosce facilmente nei singoli casi. Il più semplice esempio è offerto dall'ordinario punto cuspidale di una curva nodale (pince-point), nel quale due falde della superficie vengono a coincidere in una, le sezioni presentando una cuspide anzichè un nodo come accade per le sezioni generiche. Una facile verifica analitica (che — dato il carattere differenziale della questione — si può compiere supponendo C una retta) mostra che in un punto cuspidale P vi è in generale *una* retta, a (diversa dalla tangente alla C) asse di un fascio di piani che segano la superficie secondo curve aventi un tacnodo in P: il punto P_1, infinitamente vicino a P sulla retta a, risulta doppio per la superficie, e per esso passano effettivamente tutte le curve L. Ora se si eseguisce una trasformazione quadratica spaziale (di prima specie) che abbia come punto fondamentale isolato il punto cuspidale P, la nostra superficie f si trasforma in una superficie f' la quale avrà come doppia la curva C', trasformata di C, e su questa sarà punto cuspidale il punto P', omologo del punto di C infinitamente vicino a P. Ora P' essendo un punto cuspidale come P, prossimo ad esso e fuori della curva doppia esisterà un punto doppio P'_1, che si riconoscerebbe facilmente appartenere al piano fondamentale π, trasformato dell'intorno del punto P. Potendosi ripetere indefinitamente la trasformazione precedente, si riconosce che: *esiste una infinità discreta di punti doppi infinitamente vicini alla curva nodale* C, *nell'intorno di un suo punto cuspidale.*

Le varie particolarizzazioni del punto cuspidale si possono riconoscere nel modo più facile considerando superficie dotate di una conica doppia o multipla, proveniente da una trasformazione quadratica in cui la conica corrisponde alle generatrici del cono quadrico fondamentale (l'ipotesi che C sia una conica è una restrizione solo apparente). Si vede in tal modo che il caso in cui la suddetta retta a risulti tangente alla C dà origine a un *punto cuspidale* particolare, *riunione di due punti cuspidali infinitamente vicini* (quantunque la sezione generica non metta in luce alcuna differenza dal caso generale); *nell'intorno* di un siffatto punto cuspidale, P, *esiste* una *curva doppia infinitesima*; infatti se si eseguisce una trasformazione quadratica avente in P il punto fondamentale isolato, il punto P' prossimo a P su C dà origine ad un tacnodo per la superficie trasformata, e le sezioni passanti per P′ hanno il genere abbassato.

Una generalizzazione del punto cuspidale ordinario è offerta dal punto cuspidale del terz'ordine, cioè da un punto P di una curva tripla (o di maggior molteplicità) in cui tre falde lineari si saldino in una del terzo ordine, le sezioni piane per P presentando un ramo ordinario nel terz'ordine. In un tale punto P le L presentano una cuspide con tangente fissa, e il punto P_1, successivo a P su questa tangente, è un punto doppio biplanare dispari, non limite di due punti doppî, quantunque il punto cuspidale P possa ritenersi limite di due punti cuspidali ordinarî infinitamente vicini.

La particolarità presentata da un punto cuspidale del second'ordine, che ne abbia un altro infinitamente vicino, si riscontra generalizzata per i punti delle curve cuspidali: *se* P *è un punto semplice di una curva cuspidale* C, *i punti* $P_1, P_2, P_3, \ldots$, *successivi a* P *sopra* C, *sono punti che alternativamente abbassano il genere* (*e non il rango*) *delle sezioni superficiali passanti per essi*; così le sezioni passanti per P, P_1, presentano in P tre punti infinitamente vicini e hanno il genere abbassato di un' unità, quelle passanti per P, P_1, P_2, P_3, ne presentano sei e hanno il genere abbassato di due unità, ecc. [1] [Di ciò si può dare una facile verifica analitica intersecando la superficie f con superficie cilindriche $y = y(x)$], e considerando la curva $f(z, x, y(x)) = 0$ e la relativa polare $\frac{\partial f(z, x, y(x))}{\partial z} = 0$].

4. Lasciando da parte i punti semplici di C che siano ipermultipli per f, i quali possono presentare le singolarità le più complicate, veniamo ai punti multipli della curva multipla, limitandoci ai casi più semplici. Chiameremo qui inessenziali quei punti nei quali la singolarità della superficie dipende dalla singolarità della curva multipla; ciò posto vediamo che:

Esistono punti multipli inessenziali della curva multipla che non abbassano nè il genere nè la classe delle sezioni piane.

Il caso più semplice viene offerto da un punto P ove s'incrociano due curve doppie o due rami di una stessa curva doppia: le sezioni per P presentano un tacnodo. Questo caso si realizza prendendo una superficie f composta di due superficie φ e ψ che si tocchino in P. Questo esempio si può generalizzare in due sensi: si ha un punto, P, ancor doppio per f, per cui la curva doppia passa con i rami (le sezioni per P presentando i punti doppî successivi) ove si sommino due superficie φ e ψ aventi a comune i paraboloidi osculatori fino all'ordine $i - 1$; si ha un punto i-plo per f

[1] Cfr. B. Levi, Annali di matematica, tomo 2°, serie III, *Intorno alla composizione* ecc., § 1, n. 5.

e per le sue sezioni, per cui passano $\frac{i(i-1)}{2}$ rami della curva doppia, sommando i superficie generiche passanti per P.

Esistono punti multipli inessenziali della curva multipla che abbassano il genere senza abbassare la classe delle sezioni piane.

Il caso più semplice viene offerto da un punto doppio che sia incrocio di due curve cuspidali, per es. l'origine delle coordinate nella superficie

$$f = z^2 - x^3 y^3 \varphi(x\,y\,z) = 0,$$

$\varphi(x\,y\,z)$ essendo un polinomio qualunque, per la quale sono rette cuspidali gli assi x e y: un piano che venga a passare per l'origine sega la superficie secondo una curva non più dotata di due cuspidi ma di tre punti doppî infinitamente vicini, sicchè il genere diminuisce di un' unità pur restando invariata la classe.

Il fatto messo in luce dall'esempio precedente sembra contraddire alla veduta che di un punto multiplo, abbassante il genere delle sezioni superficiali per esso, viene porta dalla geometria sopra le superficie, dove le curve fondamentali, θ, di un sistema lineare $|K|$, abbassanti il genere delle curve residue (cioè le curve fondamentali *proprie*) fan parte (generalmente) del sistema jacobiano di $|K|$: in corrispondenza a ciò, se le K divengono le sezioni piane della superficie f, e quindi la θ è rappresentata da un punto multiplo, P, abbassante il genere delle sezioni piane, dovrebbe P appartenere alle curve L, sezioni variabili delle polari di f, e quindi abbassare la classe delle sezioni che vengono a passare per P. Questa apparente contraddizione si risolve osservando che si può avere una θ, riducibile sopra una trasformata ad un punto semplice P, la quale dia luogo ad una eccezione per il teorema precedente: così accade di regola se P è punto comune a due curve luogo di coppie di punti infinitamente vicini neutre per $|K|$, nel qual caso le K costrette a passare per P acquistano ivi un punto doppio.

Esistono ancora punti multipli inessenziali della curva multipla che abbassano la classe ma non il genere delle sezioni piane. L'esempio più semplice si ottiene proiettando sullo spazio S_3 una superficie F di S_4 che abbia una trisecante p, passante per il centro di proiezione O, quando questa trisecante $(1,2,3)$ diventi tangente $(2 = 3)$. La proiezione, f, avrà un punto triplo P, la cui singolarità risulta dal fatto che per P passano un ramo lineare e un ramo cuspidale della curva doppia nodale di f; l'asserto si può verificare osservando come il ramo cuspidale corrisponda alla coincidenza delle due coppie di punti (1 2) e (1 3) allineati con O.

5. Nei casi che precedono il cono osculatore alla f nel punto P è sempre costituito di piani da contarsi una o più volte. Ora vale in generale il

TEOREMA: *Se un punto multiplo* P *della curva multipla è tale che il cono osculatore ad f non sia riducibile in un gruppo di piani (contenendo una parte essenzialmente conica), esso abbassa contemporaneamente il genere e la classe delle sezioni piane.*

Pongasi infatti che nel punto multiplo, P, della superficie f si abbia un cono osculatore non formato di piani, per es. contenente come parte un cono quadrico Q; facciamo vedere che, in forza di tale ipotesi, il punto P abbassa il genere e la classe delle sezioni piane passanti per esso. Perciò si assuma un piano π vicino a P, e si consideri la curva variabile K da esso segata su f; si vede che al limite, quando π viene a passare per P, la K acquista un nuovo punto doppio che va a fondersi nella singolarità P, perocchè spariscono due tangenti a K condotte per un punto generico di π.

Fisica. — *Sulla costante della legge di Stefan-Boltzmann.* Nota del prof. LUIGI PUCCIANTI in risposta alla dott. MARYA KAHANOWICZ, presentata dal Socio A. RÒITI [1].

Nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei [2] è comparsa una Nota della dott. Marya Kahanowicz, presentata dal prof. Michele Cantone, nella quale alla succinta esposizione di una nuova determinazione di questa costante fisica generale, precedono alcuni sommarî giudizi sopra anteriori ricerche fatte allo stesso fine da varî sperimentatori, ed uno di tali giudizi sommarî, anzi una sommaria condanna tocca alle esperienze da me fatte e pubblicate nel Nuovo Cimento del 1912.

Il giudizio è il seguente:

« In quanto poi al radiatore di Puccianti è da notare che l'energia da « esso irradiata non può considerarsi come dovuta ad un corpo nero: 1° perchè « le pareti della cavità difficilmente potevano assumere temperatura uniforme, « per quanto si cercasse di mantenere il pallone nell'aria liquida fino al « collo; 2° perchè lo schermo che limitava l'area emittente non era mante- « nuto alla temperatura del ricevitore, nel quale caso, come risulta da alcune « mie esperienze dove si faceva fluire lentamente il liquido nella scatola in « cui era praticata la finestra, funzionano da sorgente anche le pareti che « limitano l'apertura, aggiungendo dell'energia a quella emessa dal radia- « tore ».

[1] Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1917.
[2] Seduta del 15 aprile 1917.