# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXVI.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

la ricerca per l'impossibilità di procurarci, in quantità sufficiente, i prodotti che ci sarebbero occorsi.

Abbiamo infine tentato di mettere in evidenza il fenomeno adoperando dell'olio di vasellina commerciale (poichè non ne abbiamo trovato puro) e sottoponendolo all'azione ionizzante dei raggi X per renderlo debolmente conduttore. Ma si è constatato che delle cariche, o per induzione — malgrado si sia rinchiuso il tubo generatore in una cassa foderata di piombo in comunicazione col suolo, e si sia tappato il foro d'uscita dei raggi con una lamina di alluminio spessa mm. 0,5 — o per azione stessa dei raggi X (¹) si determinano nel circuito comprendente il balistico: tali cariche, all'atto della variazione di superficie dell'elettrodo di mercurio $a$, si mettono in circuito, per la variata capacità di questo elettrodo, e turbano l'osservazione della deviazione al galvanometro dovuta eventualmente alla variazione di densità del doppio strato. Occorre quindi ritentare la prova adoperando più opportuni mezzi ionizzanti.

## Meccanica celeste. — *Ricerche sopra le perturbazioni del satellite di Nettuno.* Nota III di G. Armellini, presentata dal Socio T. Levi-Civita (²).

1. Come fu detto, noi ci proponiamo di esaminare se le perturbazioni del satellite di Nettuno possano essere prodotte — come sembra supporre lo Struve — dall'attrazione di un secondo satellite perturbatore, rimasto ancora sconosciuto a cagione della sua piccola massa. A tale scopo abbiamo indicato con $m, a, n, \omega, i$, la massa, la distanza e il moto medio, il nodo e l'inclinazione del satellite noto e con le medesime lettere accentate, $m', a', n', \omega', i'$, i corrispondenti elementi dell'ipotetico satellite perturbatore. Abbiamo poi adottato come unità di misura il giorno solare medio, il semidiametro equatoriale e la massa di Nettuno, e come piano di riferimento (rispetto al quale contiamo i nodi e le inclinazioni) quello che nella teoria del Tisserand si considera come piano equatoriale di Nettuno, e che, nell'ipotesi in cui ci siamo posti, è invece il piano invariabile del sistema formato dal pianeta e dai due satelliti.

Riferendoci al caso II in cui il satellite perturbatore si supponeva esterno, avevamo posto $\alpha = \frac{a}{a'}$, donde $\alpha < 1$.

2. Ritenendo sempre l'eccentricità trascurabile e l'inclinazione non grande (p. es. $i' \leqq 30°$) vedemmo nella Nota II che il massimo valore di $\alpha$,

(¹) Righi, Rend. Acc. Bologna, 9 febbraio ed 8 marzo 1896.
(²) Pervenuta all'Accademia il 30 agosto 1917.

che indicheremo con $\alpha_1$, e quindi il massimo valore di $n'$, che avevamo indicato con $\nu$, si otteneva risolvendo l'equazione trascendente:

$$(1) \qquad \nu\,\lambda(\alpha_1) = \frac{\gamma n}{m(1 + 2 \operatorname{sen} i)}$$

dove si ha:

$$(2) \qquad \gamma = -\frac{\pi}{n} \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

$$(3) \qquad \alpha_1 = \sqrt[3]{\frac{\nu^2}{n^2}}$$

$$(4) \qquad \lambda(\alpha_1) = \frac{1}{1-\alpha_1^2}\left[\frac{1+\alpha_1^2}{1-\alpha_1^2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\alpha_1^2 \operatorname{sen}^2\vartheta}\,d\vartheta - \right.$$
$$\left. - \int_0^{\pi/2}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\alpha_1^2\operatorname{sen}^2\vartheta}}\right].$$

Eliminando allora $\nu$ tra la (1) e la (3) e sostituendo al posto di $\lambda$ e di $\gamma$ i loro valori, risulta:

$$(5) \qquad -\frac{\pi}{mn(1+2\operatorname{sen} i)}\,\frac{d\omega}{dt} =$$
$$= \frac{\alpha_1^{3/2}}{1-\alpha_1^2}\left\{\frac{1+\alpha_1^2}{1-\alpha_1^2}\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\alpha_1^2\operatorname{sen}^2\vartheta}\,d\vartheta - \int_0^{\pi/2}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-\alpha_1^2\operatorname{sen}^2\vartheta}}\right\}.$$

3. Ora dalle recenti osservazioni del Dyson (1) risulta:

$$(6) \qquad i = 16^\circ \quad ; \quad n = 61^\circ{,}2622\,.$$

Quanto ad $m$, in mancanza di altri dati, mi sono servito per calcolarlo delle osservazioni fotometriche del Pickering (2), da cui risulta che il satellite noto, ammettendo che abbia la stessa *albedine* di Nettuno, ha un diametro di circa 3630 km. Supponendo allora che la sua densità media sia uguale a quella del pianeta da cui dipende, abbiamo:

$$(7) \qquad m = 0{,}000291\,.$$

4. Resta a calcolare la quantità $\frac{d\omega}{dt}$, ciò che faremo con considerazioni puramente cinematiche.

(1) Vedi Nota I. Questi Rendiconti, anno 1915, semestre 1°, pag. 573.

(2) Cfr. *Harvard Photometry*. Il Pickering stima la grandezza di Nettuno all'opposizione uguale a 7,66 e quella del suo satellite uguale a 13,59.

Cominciamo a ricordare che l'osservazione ci mostra che il polo P dell'orbita del satellite noto descrive un cerchio intorno ad un punto fisso S, — che è il polo del piano invariabile — le cui coordinate, ascensione retta e declinazione, sono approssimativamente:

$$A_1 = 288^\circ \quad ; \quad D_1 = 40 . \tag{8}$$

L'arco PS è di circa 16°, e la posizione del punto P all'epoca 1903,1 aveva per coordinate:

$$A_2 = 277{,}5 \quad ; \quad D_2 = 27{,}4 . \tag{9}$$

Chiamando allora con O il polo Nord della sfera celeste e con $\varphi$ e $\psi$ gli angoli in O e in S abbiamo dal triangolo sferico POS:

$$\cos PS = \cos PO \cos SO + \operatorname{sen} PO \operatorname{sen} SO \cos \varphi \tag{10}$$

$$\cos \psi = \frac{\cos PO - \cos PS \cos SO}{\operatorname{sen} PS \operatorname{sen} SO} . \tag{11}$$

Derivando la (10) e la (11) rispetto al tempo ed osservando che SO e PS sono costanti, si ha:

$$\operatorname{sen} PO \frac{d(PO)}{dt} = \operatorname{tg} SO \left\{ \cos \varphi \cos PO \frac{d(PO)}{dt} - \operatorname{sen} PO \operatorname{sen} \varphi \frac{d\varphi}{dt} \right\} \tag{12}$$

$$\operatorname{sen} PO \frac{d(PO)}{dt} = \operatorname{sen} SO \operatorname{sen} PS \operatorname{sen} \psi \frac{d\psi}{dt} . \tag{13}$$

Uguagliando allora i secondi membri della (12) e (13) e ricordando che $\omega$ è il nodo ascendente del satellite noto col piano invariabile, cioè precisamente col piano che ha per polo P, si ha con qualche riduzione:

$$-\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{\operatorname{sen} PO \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} PS \operatorname{sen} \psi (\operatorname{cotg} PO \cos \varphi \operatorname{sen} SO - \cos SO)} \frac{d\varphi}{dt} . \tag{14}$$

Il lettore se ne persuaderà facilmente eseguendo la figura ed osservando che il senso della rotazione di P intorno ad S risulta contrario a quello del moto del satellite noto che abbiamo assunto come positivo.

Ora dai dati sopra riportati risulta per l'epoca 1903,1

$$PO = 62^\circ{,}6 \quad ; \quad SO = 50^\circ . \tag{15}$$

D'altra parte, per immediate considerazioni geometriche, si ha alla stessa epoca:

$$\varphi = A_1 - A_2 = 10^\circ{,}5 \tag{16}$$

$$A_2 = N + \frac{\pi}{2} \tag{17}$$

dove, come abbiamo fatto nella Nota I, indichiamo con N il nodo ascendente dell'orbita del satellite noto rispetto all'equatore celeste.

Eseguendo allora i calcoli otteniamo dalla (11):

$$\psi = 138^\circ,3 \,. \tag{18}$$

Ora, come vedemmo nella Nota I, l'osservazione ci dà:

$$\mathrm{N} = 185^\circ,15 + 0^\circ,148\,(t - 1890) \tag{19}$$

dove il tempo $t$ è misurato in anni giuliani.

Sostituendo nella (16), derivando tenendo presente che $A_1$ è costante e *prendendo per unità il giorno solare medio*, come abbiamo stabilito, risulta:

$$\frac{d\varphi}{dt} = - 0^\circ,0004052 \,. \tag{20}$$

Conoscendo così tutte le quantità che entrano nel secondo membro della (14), abbiamo:

$$\frac{d\omega}{dt} = - 0^\circ,0014172 \,. \tag{21}$$

Osserviamo di passaggio che se la velocità angolare $\frac{d\omega}{dt}$ si mantenesse costante, il punto P compirebbe una rotazione intorno ad S in 696 anni; ciò che è in perfetto accordo con quanto stima il Dyson (1). Il Tisserand invece, con altri calcoli e fondandosi su osservazioni antiquate, trova dei valori molto maggiori: da 1060 a 1680 anni (2).

5. Con questi dati la (5) diviene:

$$\alpha_1^{3/2}\,\lambda(\alpha_1) = 0,16079 \,. \tag{22}$$

Ma nella Nota II abbiamo dimostrato che il primo membro della (22) è una funzione crescente dell'argomento, la quale varia da 0 ad $\infty$ quando $\alpha_1$ va da 0 ad 1. La (22) ammetterà perciò una ed una sola radice reale e positiva, che noi potremo ottenere con metodi analoghi ai metodi di Newton e Horner per le equazioni algebriche. Fatti i calcoli si ha:

$$\alpha_1 = 0,41866 \,. \tag{23}$$

E poichè la distanza media $a$ del satellite noto è uguale a 13,33 risulta:

$$a' = 31,84 \quad ; \quad \nu = 16^\circ,595 \,. \tag{24}$$

(1) Vedi Monthly, *Notices*, anno 1905, pag. 570.

(2) Tisserand, *Méc. Cél.* IV, pag. 147. Il Tisserand mescola ancora, in modo non troppo elegante, il lato *cinematico* col lato *dinamico* della questione.

Nell'ipotesi che il satellite perturbatore sia esterno, è questo dunque il *minimo valore ammissibile per la sua distanza media*, a cui corrisponde, come dimostrammo, il *minimo valore* $\mu$ *per la sua massa*. Riprendendo allora l'equazione ottenuta nella Nota II:

$$\mu = 2m \sqrt[3]{\frac{\nu}{n}} \operatorname{sen} i\,; \tag{25}$$

ed eseguendo i calcoli, si ha

$$\mu = 0{,}000104\,. \tag{26}$$

Vediamo dunque che la massa del satellite perturbatore risulta, nella peggiore ipotesi, maggiore della terza parte della massa del satellite noto.

Se noi supponiamo che esso abbia la stessa *albedine* del pianeta principale, potremo facilmente calcolare la grandezza fotometrica G, quando Nettuno è all'opposizione. Fatti i calcoli si ha:

$$G = 14{,}34 \tag{27}$$

cioè: lo *splendore dell'ipotetico satellite perturbatore, sarebbe, al minimo, di poco inferiore a quello del satellite noto la cui grandezza fotometrica è 13,59. Ne risulta che esso non potrebbe essere sfuggito alle nostre osservazioni, tanto più che, per la sua maggior distanza da Nettuno, le sue condizioni di visibilità sarebbero assai migliori. Possiamo quindi concludere che l'ipotesi che l'orbita del supposto satellite sia esterna, deve essere esclusa.*

Nella prossima Nota esamineremo il caso in cui si supponga l'orbita interna.

E. M.