ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXIV.

1917

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVI.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1917

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI
pervenute all'Accademia durante le ferie del 1917.

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Geodesia. — *Sulla determinazione della forma del Geoide mediante misure di gravità.* Nota del Corrispondente E. Almansi (1).

1. Io riprendo in esame, in questa Nota, un problema che è già stato oggetto d'importanti ricerche, e che presenta indubbiamente un grande interesse, anche se lo stato attuale dei dati d'osservazione non permette d'applicare la formula risolutiva (2).

Nella determinazione teorica della forma del Geoide — vale a dire della superficie equipotenziale che passa per un dato punto del livello medio del mare — si trascura l'azione esercitata sulla Terra dai corpi celesti, si trascurano le variazioni di forma che il Geoide subisce da istante a istante; e finalmente si considera la Terra come animata soltanto da un movimento di rotazione.

È da notare che non avendo in realtà la Terra nessun punto fisso nello spazio, è determinata in ogni istante la direzione D dell'asse di rotazione, non la sua posizione. Per convenzione noi diciamo asse di rotazione della Terra la retta Z di direzione D che passa per il baricentro O del sistema; e facciamo l'ipotesi che la forma del Geoide sia sensibilmente quella stessa che esso avrebbe se il sistema fosse animato soltanto da un moto di rotazione intorno all'asse Z.

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 agosto 1917.

(2) Seguirò in parte il procedimento indicato dal prof. P. Pizzetti nei suoi *Principii della Teoria meccanica della figura dei Pianeti,* Cap. VIII. Vedasi anche la Nota ivi citata a pag. 119.

Riguardo al grado di approssimazione, considerata la costante γ della formola (3) come una quantità piccola del primo ordine, γ^2 del secondo, ecc., riterremo trascurabili rispetto all' unità le quantità piccole d'ordine superiore al secondo.

Supporremo nota, solo per chiarezza d'esposizione, una dimensione L del Geoide.

2. La forma del Geoide G, nel nostro ordine di approssimazione, si saprebbe determinare, se tutto il sistema rotante T fosse contenuto nell' interno di G, e si conoscesse in ogni punto di G la grandezza della gravità. Non essendo verificate queste condizioni, noi dovremo costruire, innanzi tutto, un sistema ideale T′, rotante intorno allo stesso asse di rotazione del sistema reale T e con ugual velocità angolare, pel quale G sia ancora una superficie d'equilibrio, *ma la cui massa sia tutta contenuta nell' interno di* G; e per questo sistema T′ determinare, nei punti di G, la gravità g'.

Denotiamo con m le masse che nel sistema reale T si trovano *fuori del Geoide*. Per passare dal sistema T al sistema T′ basterà immaginare di sopprimere le masse m, e di distribuire nell' interno di G delle masse m', il cui potenziale, nei punti di G, sia uguale al potenziale delle masse m: ciò che teoricamente è sempre possibile. Praticamente, potremo immaginare sostituita ad ogni massa elementare esterna dm, una massa interna dm' uguale, situata sulla normale al Geoide condotta per dm, e che disti dal Geoide quanto ne dista la massa dm.

Sia V il potenziale newtoniano della Terra (inclusa la costante della gravitazione). Il potenziale newtoniano del sistema T′ sarà

$$V' = V - v + v',$$

v e v' essendo rispettivamente i potenziali newtoniani delle masse m ed m'. Se all'uno e all'altro membro dell'equazione aggiungiamo il potenziale della forza centrifuga, e diciamo U il potenziale totale della Terra, U′ il potenziale totale del sistema T′, avremo

$$U' = U - v + v'.$$

Per un punto P della superficie fisica della Terra conduciamo la normale n al Geoide, la quale incontri il Geoide nel punto G. E poniamo, considerando n positiva verso il basso,

$$g = \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_P, \quad g' = \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_G.$$

Le osservazioni ci fanno conoscere g, che si confonde colla grandezza della gravità nel punto P (potendosi ritenere piccolo del 2° ordine l'angolo che la verticale in P forma con n, quindi il suo coseno uguale ad 1), e noi vogliamo determinare la gravità g'.

Sostituendo, nella prima di queste formule, ad U il suo valore $U' + v - v'$, si ha

$$g = \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_P + \delta,$$

ove

$$(1) \qquad \delta = \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_P - \left(\frac{\partial v'}{\partial n}\right)_P;$$

quindi, sottraendo membro a membro dalla seconda

$$g' - g = \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_G - \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_P - \delta.$$

Posto

$$\left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_G - \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_P = k' \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_G = k' g',$$

il coefficiente k', che dipende dal potenziale U' del sistema T', racchiuso dal Geoide e pel quale il Geoide è una superficie d'equilibrio, si può calcolare con sufficiente approssimazione considerando il Geoide come un ellissoide di forma e dimensioni note, e ritenendo pure nota l'altezza PG. Avremo allora dalle due ultime formule

$$g' - g = k' g' - \delta,$$

quindi

$$g' = \frac{g - \delta}{1 - k'},$$

od anche, per la piccolezza di k' e δ, ponendo $k = k' + k'^2$,

$$(2) \qquad g' = (1 + k)\, g - \delta.$$

Il termine δ, come apparisce dalla formola (1), rappresenta *la differenza fra le componenti secondo la normale n delle attrazioni esercitate nel punto* P *dalle masse m e dalle masse m'*. Nel calcolo di δ il Geoide si può considerare come una sfera.

Devo osservare che nelle formole ordinariamente adoperate per la riduzione della gravità al livello del mare, non figura questo termine. Io non vedo però come la gravità g', calcolata in modo diverso da quello qui accennato (salvo a trascurare ancora, nella sua espressione, termini piccolissimi), possa condurre alla conoscenza della forma del Geoide, essendo essenziale nel nostro problema definire g' in maniera che sulla superficie G essa rappresenti la gravità relativa ad un sistema *pel quale* G *è una superficie d'equilibrio*.

3. Siano φ_1 e θ_1 la latitudine e la longitudine astronomiche dei punti P della superficie fisica della Terra.

Le osservazioni ci daranno g, e perciò g', espresse in funzioni di φ_1 e θ_1. Porremo

$$g' = g'' + \Delta g\,,$$

$$g'' = g_0 \{1 + \gamma \operatorname{sen}^2 \varphi_1 + \gamma' \operatorname{sen}^2 2\varphi_1\}\,, \tag{3}$$

e determineremo le costanti g_0, γ, γ' in maniera che i valori di g'' siano quanto più è possibile vicini ai corrispondenti valori di g'.

Detta Σ una sfera di centro O, stabilita una corrispondenza fra i punti $P(\varphi_1, \theta_1)$ e i punti della sfera di latitudine e longitudine geometriche φ_1, θ_1, e posto

$$\gamma_0 = g_0 \gamma\,, \quad \gamma'_0 = g_0 \gamma'\,,$$

quindi

$$\Delta g = g' - g_0 - \gamma_0 \operatorname{sen}^2 \varphi_1 - \gamma'_0 \operatorname{sen}^2 2\varphi_1\,,$$

teoricamente noi possiamo supporre attribuiti alle tre costanti g_0, γ_0, γ'_0 valori tali da rendere minima la quantità

$$\int_\Sigma \overline{\Delta g}^2 \, d\Sigma\,.$$

Risulterebbe allora, dall'annullare la sua derivata rispetto a g_0,

$$\int_\Sigma \Delta g \, d\Sigma = 0\,. \tag{4}$$

Supporremo verificata questa condizione; ciò che semplifica le formule.

Ritenendo la costante γ piccola del primo ordine (§ 1), la γ' si può ritenere del secondo.

Nella espressione di g'', a causa dei fattori γ e γ', potremo ora considerare φ_1 come la latitudine dei punti G del Geoide. Ed anche nella funzione Δg di θ_1 e φ_1 supporremo che θ_1 e φ_1 si riferiscano ai punti di questa superficie.

4. La determinazione teorica della forma del Geoide si può ridurre a determinare i segmenti SG intercetti sulle normali al Geoide, dal Geoide stesso e da uno sferoide di riferimento S, rappresentato dall'equazione

$$r = a \{1 - \alpha \operatorname{sen}^2 \varphi - \alpha' \operatorname{sen}^2 2\varphi\}\,, \tag{5}$$

ove r denota il raggio vettore uscente da O, φ il complemento dell'angolo che r forma coll'asse di rotazione Z. Alla costante a si attribuirà un valore fornito dalle osservazioni per il raggio equatoriale del Geoide considerato come un ellissoide.

Determineremo le costanti α ed α' ponendo la condizione che per un sistema T″, rotante intorno a Z colla velocità angolare della Terra, limitato da S, e pel quale S è una superficie d'equilibrio, la gravità nei punti di S sia uguale a g'', nella cui espressione (3) si consideri φ_1 come il complemento dell'angolo che formano con Z le normali ad S.

Le costanti α, α' si possono allora calcolare applicando le formule che ho dato in una Nota precedente [1].

L'equazione (5), nel nostro grado di approssimazione, può, in particolare, rappresentare un ellissoide; ma in tal caso il valore della costante α' dipende da quello di α.

5. Costruito lo sferoide S, poniamo

$$s = \pm \mathrm{SG},$$

adottando il segno $+$ o il segno $-$ secondochè il punto G del Geoide si trova fuori dello sferoide, o nel suo interno.

Il rapporto s/a si supporrà piccolo del secondo ordine, o d'ordine maggiore. Così pure l'angolo che la normale n al Geoide nel punto G forma colla normale allo sferoide nel punto S. Potremo allora ritenere che la gravità g'' relativa al sistema T″ sia la derivata del potenziale di T″ rispetto ad n; e nella sua espressione (3) considerare di nuovo φ_1 come la latitudine di G.

Sia V″ una funzione regolare in tutto lo spazio, escluso il punto O, la quale sullo sferoide S e nello spazio esterno rappresenti il potenziale newtoniano del sistema T″ limitato da S (ossia la funzione V della Nota precedente). E poniamo

$$\mathrm{V}' = \mathrm{V}'' + g_0 u. \tag{6}$$

[1] *Sulla forma dello sferoide terrestre dedotta dalle misure di gravità*, Rendic. Acc. Lincei, marzo 1917.

Come osservo a pag. 359, il procedimento da me seguito non differisce sostanzialmente da quello che ha seguito l'Helmert; il quale però non arriva alle formule (4) della mia Nota, ma si arresta ad un sistema di equazioni non risoluto rispetto alle due incognite che io denoto con α ed α'. L'arrestarsi a questo sistema sarebbe ragionevole se un procedimento per successive approssimazioni permettesse di determinare α ed α' a meno di termini piccoli ad arbitrio. Ma il modo come le equazioni di Helmert sono ottenute mostra che non si può spingere il calcolo oltre i termini del secondo ordine. Ed allora non v'è ragione per non dare, in questo grado di approssimazione, le espressioni definitive di α ed α' in funzione di quantità note. Si ottengono così le mie formule (4); le quali, come il prof. Pizzetti ha verificato in una sua Nota (ved. questi Rendiconti, maggio 1917), concordano pienamente con quelle di Helmert.

Se poi io ho esposta per intero la risoluzione del problema, ciò ho fatto perchè ritenevo, e ritengo, che il mio metodo presenti qualche vantaggio, e possa essere utilmente applicato in problemi analoghi.

Sul Geoide, e nello spazio esterno, potremo considerare $g_0 u$ come il potenziale di masse distribuite irregolarmente, entro il Geoide, *nel sistema ideale* T'.

Se aggiungiamo ad ambedue i membri dell'equazione il potenziale V_0 della forza centrifuga, e diciamo U', come nel § 2, il potenziale totale del sistema T', U'' la funzione $V'' + V_0$, che sullo sferoide S e nello spazio esterno rappresenta il potenziale totale di T'', avremo

(7) $$U' = U'' + g_0 u .$$

Per la piccolezza dei segmenti s, e per la regolarità di U'', potremo ritenere

(8) $$U''_S - U''_G = \left(\frac{\partial U''}{\partial n}\right)_G . s \ , \quad \left(\frac{\partial U''}{\partial n}\right)_S - \left(\frac{\partial U''}{\partial n}\right)_G = \left(\frac{\partial^2 U''}{\partial n^2}\right)_G . s ,$$

e nei secondi membri sostituire U'' col suo primo termine $\frac{a^2 g_0}{r}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ con $-\frac{\partial}{\partial r}$, ed eseguite le derivazioni, r con a. I secondi membri diventano allora uguali a $g_0 s$ e $2 g_0 \frac{s}{a}$. Si ha poi dalla formula (7)

$$U''_G = U'_G - g_0 u_G \ , \quad \left(\frac{\partial U''}{\partial n}\right)_G = \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_G - g_0 \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_G .$$

Onde le formule (8) diverranno:

$$U''_S - U'_G + g_0 u_G = g_0 s \ , \quad \left(\frac{\partial U''}{\partial n}\right)_S - \left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_G + g_0 \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_G = 2 g_0 \frac{s}{a} .$$

Diciamo $g_0 C'$ e $g_0 C''$ i valori costanti di U' sul Geoide, e di U'' sullo sferoide. Sarà $U'_G = g_0 C'$, $U''_S = g_0 C''$. A $\left(\frac{\partial U'}{\partial n}\right)_G$ e $\left(\frac{\partial U''}{\partial n}\right)_S$ sostituiamo g' e g''. Posto $C' - C'' = c$,

(9) $$g' - g'' = \Delta g = g_0 \psi ,$$

e diviso tutto per g_0, abbiamo

(10) $$- c + u_G = s \ , \quad - \psi + \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_G = 2 \frac{s}{a} .$$

Quindi, eliminando s,

(11) $$2 u_G - a \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_G = - a \psi + 2c .$$

Osserviamo che nel passaggio dal sistema T al sistema T', vale a dire nella sostituzione delle masse m' alle masse m, il baricentro, come dimostrerebbe facilmente un calcolo approssimato, subisce uno spostamento assolutamente trascurabile. Perciò noi potremo considerare il punto O come il baricentro del sistema T'. Nello sviluppo in serie, per funzioni sferiche, del potenziale V' (nello spazio esterno) mancherà allora il termine in $1/r^2$. Anche nella espressione di V'' manca questo termine (V. Nota prec.). Per la formula (6) esso mancherà pure in u.

6. Nell'applicare la formula (11) noi possiamo sostituire al Geoide la sfera Σ di centro O e di raggio a. Dovrà dunque aversi su questa sfera

$$2u + a\frac{\partial u}{\partial r} = -a\psi + 2c \text{ (1)}.$$

Poniamo ora

$$\omega = u - \frac{2ac}{r}.$$

Si avrà, pure sulla sfera,

$$2\omega + a\frac{\partial \omega}{\partial r} = -a\psi. \tag{12}$$

E per la prima delle formule (10)

$$s = \omega + c. \tag{13}$$

Nello spazio esterno la funzione ω, al pari della u, si comporterà come un potenziale di masse contenute entro la sfera. Ed anche nello sviluppo in serie di ω mancherà il termine in $1/r^2$.

Denoti ω' un'altra funzione che nello spazio esterno presenti i caratteri di un potenziale di masse contenute entro la sfera. Per il teorema di Green sarà

$$\int_\Sigma \omega' \frac{\partial \omega}{\partial r}\, d\Sigma = \int_\Sigma \omega \frac{\partial \omega'}{\partial r}\, d\Sigma;$$

onde l'equazione (12), moltiplicata per $\omega' d\Sigma$ e integrata, darà

$$\int_\Sigma \left(2\omega' + a\frac{\partial \omega'}{\partial r}\right)\omega\, d\Sigma = -a\int_\Sigma \psi\, \omega'\, d\Sigma. \tag{14}$$

In particolare, facendo $\omega' = 1/r$, avremo

$$\int_\Sigma \omega\, d\Sigma = -a\int_\Sigma \psi\, d\Sigma.$$

Ma per le formule (4) e (9)

$$\int_\Sigma \psi\, d\Sigma = 0. \tag{15}$$

(1) Ved. Pizzetti, loc. cit., prima formula del § 50.

Sarà dunque

$$\int_{\Sigma} \omega \, d\Sigma = 0 .$$

Ciò significa che nello sviluppo in serie di ω manca il termine in $1/r$. Ma si è veduto che vi manca pure il termine in $1/r^2$. Col tendere di r all'infinito, $r^2\omega$ tende dunque a zero.

Questa condizione, e l'altra espressa dalla formula (12), rendono pienamente determinato, sulla sfera e nello spazio esterno, il potenziale ω.

Dalla formula (13) avremo poi gli scostamenti s dei punti del Geoide dallo sferoide S, a meno della costante additiva c; la quale sarà determinata dalla condizione che la dimensione L del Geoide assuma il valore assegnato (§ 2).

7. Per la determinazione di ω giova l'osservazione del prof. Pizzetti (loc. cit., pag. 118) che la funzione

$$\omega_1 = 2\omega + r \frac{\partial \omega}{\partial r}, \tag{16}$$

la quale sulla sfera Σ, per la formula (12), diventa uguale a $-a\psi$, si comporta, nello spazio esterno, come un potenziale di masse contenute entro la sfera.

Sia P un punto dello spazio esterno, ϱ la distanza di P da un punto qualunque A di Σ. Sarà nel punto P

$$\omega_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{r^2 - a^2}{\varrho^3} \psi \, d\Sigma .$$

Detto η l'angolo che OA forma con OP, se si pone

$$F = 2\frac{r^2}{\varrho} - 3\varrho - 3a \cos\eta \, . \log(r + \varrho - a\cos\eta), \tag{17}$$

e si tien conto della relazione

$$\varrho^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\eta ,$$

si trova

$$\frac{\partial F}{\partial r} = -\frac{r^2 - a^2}{\varrho^3} r .$$

Sarà quindi nel punto P

$$r\omega_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\partial F}{\partial r} \psi \, d\Sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \int_{\Sigma} F \psi \, d\Sigma .$$

Ma dalla formula (16) si ricava

$$r\omega_1 = \frac{\partial (r^2 \omega)}{\partial r}.$$

Onde sarà

$$\frac{\partial (r^2\omega)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma F\psi\, d\Sigma\right\};$$

e per conseguenza

(18) $$r^2\omega = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma F\psi\, d\Sigma + K\ (^1),$$

ove K denota una quantità costante per tutti i punti P dello spazio esterno, situati sopra una retta p uscente da O.

Ora K è uguale a zero. Infatti, col tendere di r all' infinito, $r^2\omega$ tende a zero (§ 6). Ed anche l' integrale esteso a Σ tende a zero. Ciò si riconosce facilmente ponendo

$$F = -r + 5a\cos\eta - 3a\cos\eta\log 2r + \varepsilon,$$

ove ε, come risulta dalla formula (17), tende a zero col crescere di r; e tenendo poi conto della formula (15), e dell'altra

(19) $$\int_\Sigma \psi\cos\eta\, d\Sigma = 0.$$

Questa seconda formula si può ottenere assumendo la retta p come asse delle x, e facendo nella (14) $\omega' = \frac{x}{r^3}$. Il primo membro si annulla; sulla sfera $x = a\cos\eta$. D'onde la formula precedente.

Sarà dunque per la (18), nel punto P, vale a dire in un punto qualunque dello spazio esterno,

$$\omega = \frac{1}{4\pi r^2}\int_\Sigma F\psi\, d\Sigma.$$

Se ora facciamo tendere P verso un punto A_0 della sfera, l' integrale esteso a Σ ha per limite il valore, finito e determinato benchè F in A_0 diventi infinito, che l' integrale assume facendo in F $r = a$, quindi $\varrho = 2a \operatorname{sen}\frac{\eta}{2}$. Onde avremo sulla sfera, posto $G = \frac{F_{r=a}}{a}$,

$$\omega = \frac{1}{4\pi a}\int_\Sigma G\psi\, d\Sigma.$$

(1) Pizzetti, loc. cit., formula (23).

Dalla formula (17) si ricava

$$G = \mathrm{sen}^{-1}\frac{n}{2} - 6\,\mathrm{sen}\frac{n}{2} - 3\cos\eta\left\{\log\left(\mathrm{sen}\frac{n}{2} + \mathrm{sen}^2\frac{n}{2}\right) + \log 2a\right\}.$$

Ma sostituendo nella precedente, il termine $-3\log 2a \,.\, \cos\eta$, per la (19), dà luogo ad un termine nullo. Quindi, ponendo

$$H = \mathrm{sen}^{-1}\frac{n}{2} - 6\,\mathrm{sen}\frac{n}{2} - 3\cos\eta \,.\, \log\left(\mathrm{sen}\frac{n}{2} + \mathrm{sen}^2\frac{n}{2}\right),$$

otterremo finalmente:

$$\omega = \frac{1}{4\pi a}\int_{\Sigma} H\psi\, d\Sigma\,.$$

8. Aggiungerò ancora un'osservazione.

Riprendiamo l'espressione (2) della gravità ridotta:

$$g' = (1 + k)\,g - \delta\,.$$

Possiamo porre

(20) $$\delta = \sigma - \sigma',$$

ove σ e σ' rappresentano le componenti verticali (o, se vogliamo, normali al Geoide) delle attrazioni esercitate nel punto P dalle masse esterne m, e dalle masse m' (masse m rovesciate). Diciamo poi σ_1 la componente verticale dell'attrazione che eserciterebbe nel punto P una massa distribuita nello spazio occupato dai mari con densità uguale alla differenza fra la densità media della crosta terrestre, e la densità dell'acqua. Togliendo ed aggiungendo il termine σ_1, avremo

$$\delta = (\sigma - \sigma_1) - \sigma' + \sigma_1\,.$$

Il termine fra parentesi rappresenta la componente verticale dell'attrazione esercitata nel punto P da masse corrispondenti a irregolarità *visibili* nella distribuzione della massa terrestre. L'intero termine δ rappresenterebbe la componente verticale dell'attrazione dovuta a *tutte* le irregolarità della massa terrestre, se oltre alle irregolarità visibili si avessero, nelle regioni sottostanti alle masse che emergono dal Geoide, ed ai mari, difetti ed eccessi di materia, i primi tali da dar luogo all'attrazione $-\sigma'$, e perciò rappresentabili mediante le masse $-m'$, i secondi all'attrazione σ_1.

Dalle osservazioni si è effettivamente portati a supporre che le irregolarità visibili nella distribuzione della massa terrestre siano, almeno in parte, compensate. Ma quanto è detto nel § 2 mostra che, nelle ricerche relative alla forma del Geoide, si deve dare al termine δ l'espressione (20) *indipendentemente da qualunque ipotesi sulla distribuzione della massa terrestre.*