ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Matematica. — *Una espressione differenziale vettoriale alternata.* Nota di ANGELO PENSA, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO.

Il punto P varia in un campo (continuo, derivabile) a tre o due dimensioni; α, β sono *omografie*, ed $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ *vettori* funzioni del punto P; $\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono *vettori* indipendenti da P (costanti); Φ è l'operatore omografico binario definito ponendo:

$$[0] \qquad \Phi(\alpha, \beta) = \mathrm{Rot}(\alpha\beta) - \mathrm{Rot}\,\alpha \, . \, \beta ,$$

e che viene introdotto solo per abbreviare la scrittura (¹).

Principale oggetto di questa Nota è la formula generale seguente:

$$[1] \qquad \frac{d\alpha}{dP}\beta\mathbf{x} \, . \, \gamma\mathbf{y} - \frac{d\alpha}{dP}\beta\mathbf{y} \, . \, \gamma\mathbf{x} = \\ = \mathrm{K}\,\{ \mathrm{C}\beta \, . \, \Phi(\mathrm{K}\gamma, \mathrm{K}\alpha) - \Phi[\mathrm{K}\beta \, . \, \mathrm{K}\gamma, \mathrm{K}\alpha] \}\, (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}),$$

che per β, oppure γ invertibili, assume le forme:

$$[1'] \qquad \frac{d\alpha}{dP}\beta\mathbf{x} \, . \, \gamma\mathbf{y} - \frac{d\alpha}{dP}\beta\mathbf{y} \, . \, \mathbf{y}\mathbf{x} = \mathrm{K}\Phi[\mathrm{K}(\gamma\beta^{-1}), \mathrm{K}\alpha] \, . \, \mathrm{R}\beta(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) .$$

$$[1''] \qquad \frac{d\alpha}{dP}\beta\mathbf{x} \, . \, \gamma\mathbf{y} - \frac{d\alpha}{dP}\beta\mathbf{y} \, . \, \gamma\mathbf{x} = \\ = \{ \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha \, . \, \mathrm{CK}(\beta\gamma^{-1}) - \mathrm{K}\Phi[\mathrm{K}(\beta\gamma^{-1}), \mathrm{K}\alpha] \} \, . \, \mathrm{R}\gamma(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) .$$

La dimostrazione della [1], e quindi delle [1'], [1''], è basata sulla formula:

$$[2] \qquad 2\mathrm{V}\left(\alpha \, . \, \frac{d(\beta\mathbf{a})}{dP} \, . \, \gamma\right) = \{ \mathrm{C}\gamma \, . \, \Phi(\alpha \, . \, \beta) - \Phi(\mathrm{K}\gamma \, . \, \alpha, \beta) \} \, \mathbf{a} ,$$

dalla quale risultano pure le formule notevoli:

$$[3] \qquad 2\mathrm{V}\left(\alpha \, . \, \frac{d\beta}{dP}\mathbf{a} \, . \, \gamma\right) = \\ = \{ \mathrm{C}\gamma \, . \, \Phi(\alpha, \beta) - \Phi(\mathrm{K}\gamma \, . \, \alpha, \beta) + \mathrm{R}'(\alpha \, . \, \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\beta \, . \, \mathrm{K}\gamma) \} \, \mathbf{a}$$

$$[4] \qquad 2\mathrm{V}\left(\alpha \, . \, \mathrm{K}\,\frac{d(\beta\mathbf{a})}{dP} \, . \, \gamma\right) = \\ = \{ \mathrm{C}\gamma \, . \, \Phi(\alpha, \beta) - \Phi(\mathrm{K}\gamma \, . \, \alpha, \beta) - \mathrm{R}'(\alpha, \mathrm{K}\gamma) \, . \, \mathrm{Rot}\,\beta \} \, a .$$

(¹) Si ha subito:

$$\Phi(1, \beta) = \mathrm{Rot}\,\beta \quad ; \quad \Phi(\alpha, 1) = 0 ;$$
$$\Phi(\alpha\beta, \gamma) + \Phi(\alpha, \beta)\,\gamma = \Phi(\alpha, \beta\gamma) .$$

Dimostreremo ora queste formule [1].

1. Cominciamo col dimostrare la [2]. Si ha (cfr. *b*):

$$\frac{d(\alpha\beta\mathrm{a})}{dP} = \alpha\,\frac{d(\beta\mathrm{a})}{dP} + \frac{d\alpha}{dP}\,\beta\mathrm{a} - \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha\,.\,(\beta\mathrm{a})\wedge\,,$$

e quindi

$$(h)\qquad 2\mathrm{V}\left[\alpha\cdot\frac{d(\beta\mathrm{a})}{dP}\cdot\gamma\right] = 2\mathrm{V}\left[\frac{d(\alpha\beta\mathrm{a})}{dP}\,\gamma\right] - 2\mathrm{V}\left[\frac{d\alpha}{dP}\,\beta\mathrm{a}\,.\,\gamma\right] + \\ + 2\mathrm{V}\,[\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha\,.\,(\beta\mathrm{a})\wedge.\,\gamma]\,.$$

Il primo e terzo termine del secondo membro si sanno già calcolare [cfr. *c*), n. 3, formula (2′); *d*), § 3, formula (5)]; rimane da calcolare il secondo.

Si ha [cfr. A. V. G., vol. I, nn. 8, 15, 37, 38; e vol. II, pag. 237, form. (4′)]:

$$2\mathrm{V}\left(\frac{d\alpha}{dP}\,\beta\mathrm{a}\,.\,\gamma\right)\times\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = \mathbf{v}\times\left(\frac{d\alpha}{dP}\,\beta\mathrm{a}\right)\gamma\mathbf{u} - \mathbf{u}\times\left(\frac{d\alpha}{dP}\,\beta\mathrm{a}\right)\gamma\mathbf{v} =$$

$$= \mathbf{u}\times\mathrm{K}\gamma\cdot\left(\frac{d\mathrm{K}\alpha}{dP}\,\beta\mathrm{a}\right)\mathbf{v} - \mathbf{v}\times\mathrm{K}\gamma\cdot\left(\frac{d\mathrm{K}\alpha}{dP}\,\beta\mathrm{a}\right)\mathbf{u} =$$

$$= \mathbf{u}\times\mathrm{K}\gamma\cdot\left[\frac{d(\mathrm{K}\alpha\mathbf{v})}{dP}\,\beta\mathrm{a}\right] - \mathbf{v}\times\mathrm{K}\gamma\cdot\left[\frac{d(\mathrm{K}\alpha\mathbf{u})}{dP}\,\beta\mathrm{a}\right] =$$

$$= (\beta\mathrm{a})\times\left\{\mathrm{K}\,\frac{d(\mathrm{K}\alpha\mathbf{v})}{dP}\cdot\gamma\mathbf{u} - \mathrm{K}\,\frac{d(\mathrm{K}\alpha\mathbf{u})}{dP}\cdot\gamma\mathbf{v}\right\} =$$

$$= (\beta\mathrm{a})\times\left\{\frac{d(\mathrm{K}\alpha\mathbf{v})}{dP}\cdot\gamma\mathbf{u} - \frac{d(\mathrm{K}\alpha\mathbf{u})}{dP}\cdot\gamma\mathbf{v} + \mathrm{rot}(\mathrm{K}\alpha\mathbf{u})\wedge\gamma\mathbf{v} - \mathrm{rot}(\mathrm{K}\alpha\mathbf{v})\wedge\gamma\mathbf{u}\right\} =$$

$$= (\beta\mathrm{a})\times\left\{\frac{d\mathrm{K}\alpha}{dP}\,\gamma\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v} - \frac{d\mathrm{K}\alpha}{dP}\,\gamma\mathbf{v}\,.\,\mathbf{u} + \mathrm{R}'(\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha\,,\gamma)\,(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\right\} =$$

$$= (\beta\mathrm{a})\times\left\{\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha\,.\,\mathrm{C}\mathrm{K}\gamma - \mathrm{K}\Phi(\mathrm{K}\gamma\,,\alpha) + \mathrm{R}'(\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha\,,\gamma)\right\}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}) =$$

$$= (\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\times\left\{\mathrm{C}\gamma\,.\,\mathrm{Rot}\,\alpha - \Phi(\mathrm{K}\gamma\,,\alpha) + \mathrm{R}'(\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha\,,\mathrm{K}\gamma)\right\}\beta\mathrm{a}\,.$$

[1] Dovremo citare i lavori seguenti: C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale* (Mattei et C., Pavia), vol. I e II, che indicheremo brevemente con A. V. G.; *a*) C. Burali-Forti, *Alcune linee e superficie collegate con una linea gobba*, (Rendiconti R. Accademia dei Lincei, vol. XXVII, serie 5ª, 1° sem. [1918], pag. 109); *b*) M. Bottasso, *Sull'operatore differenziale binario* S *di M. Pieri* (Rendiconti R. Accademia dei Lincei, vol. XXIII, ser. 5ª, 1° sem. [1914], pp. 659-665); *c*) A. Pensa, *Sopra alcuni operatori differenziali omografici* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. XLVIII [1912]); *d*) Idem, *Su alcune omografie speciali e sugli operatori omografici* **C**, R (Atti R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. LIII, [1917]); *e*) Idem, *Sull'operatore omografico* R′ (Atti R. Accad. delle Scienze di Torino, vol LIII, [1917]).

Di qui si ha, per l'arbitrarietà di $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$:

$$2\mathrm{V}\left(\frac{d\alpha}{dP}\beta\mathbf{a}\,.\,\gamma\right)=\left\{\mathrm{C}\gamma\,.\,\mathrm{Rot}\,\alpha-\Phi(\mathrm{K}\gamma\,,\,\alpha)+\mathrm{R}'(\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha\,,\,\mathrm{K}\gamma)\right\}\beta\mathbf{a}\,.$$

Ma si ha pure [cfr. c), n. 3, formula (2')]:

$$2\mathrm{V}\left[\frac{d(\alpha\beta\mathbf{a})}{dP}\gamma\right]=\left\{\mathrm{C}\gamma\,.\,\mathrm{Rot}(\alpha\beta)-\Phi(\mathrm{K}\gamma\,,\,\alpha\beta)\right\}\mathbf{a}\,,$$

ed anche [cfr. d), § 3, formula (5)]:

$$2\mathrm{V}\,[\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha\,.\,(\beta\mathbf{a})\wedge\,.\,\gamma]=\mathrm{R}'(\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha\,,\,\mathrm{K}\gamma)\,\beta\mathbf{a}\,.$$

Sostituendo nella (h) ed osservando che

$$\Phi(\mathrm{K}\gamma\,,\,\alpha\beta)-\Phi(\mathrm{K}\gamma\,,\,\alpha)\,\beta=\Phi(\mathrm{K}\gamma\,.\,\alpha\,,\,\beta)\,,$$

si ha la [2].

Per dimostrare le [3], [4] basta osservare che

$$\frac{d(\beta\mathbf{a})}{dP}=\frac{d\beta}{dP}\mathbf{a}-\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\beta\,.\,\mathbf{a}\wedge\quad;\quad\mathrm{K}\frac{d(\beta\mathbf{a})}{dP}=\frac{d(\beta\mathbf{a})}{dP}-(\mathrm{Rot}\,\beta\mathbf{a})\wedge\,,$$

per ridursi alla [2] e ad altre formule note [cfr. e), § 1, formula (4)].

2. Per $\gamma=1$ si ottiene la mia (2) [cfr. c)] sotto la forma:

$$(2_1)\qquad 2\mathrm{V}\left(\alpha\cdot\frac{d(\beta\mathbf{a})}{dP}\right)=\Phi(\alpha\,,\,\beta)\,\mathbf{a}\,;$$

per le mie (4), (6) [cfr. c)] si ha, dalle [3], [4], per $\gamma=1$:

$$(4_1)\qquad 2\mathrm{V}\left(\alpha\cdot\frac{d\beta}{dP}\mathbf{a}\right)=\left\{\Phi(\alpha\,,\,\beta)+\mathrm{C}(\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\beta\,.\,\mathrm{K}\alpha)\right\}\mathbf{a}\,,$$

$$(6_1)\qquad 2\mathrm{V}\left(\alpha\cdot\mathrm{K}\frac{d(\beta\mathbf{a})}{dP}\right)=\left\{\Phi(\alpha\,,\,\beta)-\mathrm{C}\mathrm{K}\alpha\,.\,\mathrm{Rot}\,\beta\right\}\mathbf{a}\,,$$

nelle quali comparisce la Φ in luogo della sua forma esplicita [0], come in c). La forma di (4_1) è alquanto diversa da quella della (4) in c); la riduzione di una forma all'altra è assai lunga: direttamente la (4_1) si ottiene dalla (2) applicando a $\frac{d(\beta\mathbf{a})}{dP}$ la formula, data in b):

$$\frac{d(\alpha\mathbf{u})}{dP}=\alpha\frac{d\mathbf{u}}{dP}+\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{u}-\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha\,.\,\mathbf{u}\wedge\,.$$

Per $\alpha=1$, dalle [2], [3], [4] si ottengono le mie [2'], [4'], [6'] di c); queste, del resto, si ottengono dalle precedenti [2_1], [4_1], [6_1] calcolando il 2V della coniugata, e ciò per la relazione nota $\mathrm{V}\gamma=-\mathrm{V}\mathrm{K}\gamma$.

Giova notare che per calcolare l' I_1 delle omografie [1]:

$$(l) \qquad \alpha \cdot \frac{d(\beta \mathbf{a})}{dP} \cdot \gamma \quad , \quad \alpha \cdot \frac{d\beta}{dP} \mathbf{a} \cdot \gamma \quad , \quad \alpha \cdot \mathrm{K} \frac{d(\beta \mathbf{a})}{dP} \cdot \gamma$$

possono usarsi le mie formule (1), (3), (5) di *c*), giacchè, in generale, $I_1(\alpha\beta) = I_1(\beta\alpha)$, e quindi nelle ($l$) si può portare γ al primo posto, senza alterare l' I_1.

3. Dimostriamo ora la [1]. Si ha:

$$\left\{ \frac{d\alpha}{dP} \beta \mathbf{x} \cdot \gamma \mathbf{y} - \frac{d\alpha}{dP} \beta \mathbf{y} \cdot \gamma \mathbf{x} \right\} \times \mathbf{a} =$$

$$= \mathbf{y} \times \mathrm{K}\gamma \cdot \left(\frac{d\mathrm{K}\alpha}{dP} \beta \mathbf{x} \right) \mathbf{a} - \mathbf{x} \times \mathrm{K}\gamma \cdot \left(\frac{d\mathrm{K}\alpha}{dP} \beta \mathbf{y} \right) \mathbf{a} =$$

$$= \mathbf{y} \times \mathrm{K}\gamma \cdot \frac{d(\mathrm{K}\alpha \mathbf{a})}{dP} \beta \mathbf{x} - \mathbf{x} \times \mathrm{K}\gamma \cdot \frac{d(\mathrm{K}\alpha \mathbf{a})}{dP} \beta \mathbf{y} =$$

$$= 2\mathrm{V} \left(\mathrm{K}\gamma \cdot \frac{d(\mathrm{K}\alpha \mathbf{a})}{dP} \cdot \beta \right) \times \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} =$$

$$= \left\{ \mathrm{C}\beta \cdot \Phi(\mathrm{K}\gamma , \mathrm{K}\alpha) - \Phi(\mathrm{K}\beta \cdot \mathrm{K}\gamma , \mathrm{K}\alpha) \right\} \mathbf{a} \times \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} =$$

$$= \mathbf{a} \times \left\{ \mathrm{K}\Phi(\mathrm{K}\gamma , \mathrm{K}\alpha) \cdot \mathrm{CK}\beta - \mathrm{K}\Phi(\mathrm{K}\beta \cdot \mathrm{K}\gamma , \mathrm{K}\alpha) \right\} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}),$$

che per l'arbitrarietà di $\mathbf{a}$, dimostra la [1].

Per dimostrare la [1'] basta porre

$$\beta \mathbf{x} = \mathbf{x}' \ , \ \beta \mathbf{y} = \mathbf{y}' \ , \quad \text{cioè} \quad \mathbf{x} = \beta^{-1} \mathbf{x}' \ , \ \mathbf{y} = \beta^{-1} \mathbf{y}' \ ,$$

e sostituire questi valori di $\mathbf{x}$ ed $\mathbf{y}$ nella [1], o meglio nell' ultimo caso particolare del n. 4. Per la [1''] si procederà analogamente ponendo $\gamma \mathbf{x} = \mathbf{x}'$, $\gamma \mathbf{y} = \mathbf{y}'$, e sostituendo nella [1], o nella seconda del n. 4.

4. I seguenti casi particolari della [1] sono noti.

Per $\beta = 1$, e $\gamma = 1$ (cfr. A. V. G., vol. I, pag. 74, [4']):

$$\frac{d\alpha}{dP} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \frac{d\alpha}{dP} \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = \mathrm{K}\Phi(1 , \mathrm{K}\alpha)\,(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha(\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}).$$

[1] Se, imitando la notazione [0], si pone:

$$\Psi(\alpha , \beta) = \mathrm{grad}(\alpha\beta) - \alpha\, \mathrm{grad}\, \beta \ ,$$

allora le (1), (3), (5) della mia Nota *c*) assumono le forme:

$$(1_1) \qquad I_1 \left(\alpha \cdot \frac{d(\beta \mathbf{a})}{dP} \right) = \Psi(\mathrm{K}\beta , \mathrm{K}\alpha) \times \mathbf{a}$$

$$(3_1) \qquad I_1 \left(\alpha \cdot \frac{d\beta}{dP} \mathbf{a} \right) = \left\{ \alpha\, \mathrm{grad}\, \beta + 2\mathrm{V}\Phi(\alpha , \beta) \right\} \times \mathbf{a}$$

$$(5_1) \qquad I_1 \left(\alpha \cdot \mathrm{K} \frac{d(\beta \mathbf{a})}{dP} \right) = \left\{ \Psi(\mathrm{K}\beta , \mathrm{K}\alpha) + 2(\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\beta)\, \mathrm{V}\alpha \right\} \times \mathbf{a} .$$

Per $\gamma = 1$ (cfr. A. G. V., vol. II, pag. 137, [4′]):

$$\frac{d\alpha}{dP}\beta \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \frac{d\alpha}{dP}\beta \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = \mathrm{K} \{ \mathrm{C}\beta \cdot \Phi(1\,, \mathrm{K}\alpha) - \Phi(\mathrm{K}\beta\,, \mathrm{K}\alpha) \} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) =$$

$$= \mathrm{K} \{ \mathrm{C}\beta \cdot \mathrm{Rot}\, \mathrm{K}\alpha - \Phi(\mathrm{K}\beta\,, \mathrm{K}\alpha) \} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})\,.$$

Per $\beta = 1$ [cfr. *a*)]:

$$\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{x} \cdot \gamma \mathbf{y} - \frac{d\alpha}{dP}\mathbf{y} \cdot \gamma \mathbf{x} = \mathrm{K}\Phi(\mathrm{K}\gamma\,, \mathrm{K}\alpha)\,(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}).$$

Le formule precedenti valgono anche quando P varia sopra una superficie σ, intendendo che in tal caso gli operatori differenziali abbiano l'indice σ [cfr. *a*) e le Note ivi citate dei prof. Burgatti e Marcolongo].

Chimica. — *Ossidazione della santonina per mezzo dei superacidi organici* (¹). Nota di Guido Cusmano, presentata dal Socio A. Angeli.

Sino ad oggi sono state descritte quattro mono-ossisantonine $C_{15}H_{18}O_4$, distinte in qualche trattato con le lettere α, β, γ, δ e delle quali nessuna è stata ottenuta per diretta ossidazione, *in vitro*, della santonina. Le prime due sono le cosiddette *santogenine* rinvenute nel 1897 da Jaffé, una nella orina di cani, l'altra nell'orina di conigli, cui erasi somministrata santonina; la terza è l'*artemisina* che accompagna la santonina nei fiori di *Artemisia maritima*; la quarta, infine, è l'*isoartemisina*, ottenuta nel 1905 da Wedekind e Koch [2], trattando con alcali una monoclorosantonina. Gli autori, prefiggendosi di preparare qualche ossi-santonina, ricorsero al processo accennato piuttosto che agli ossidanti, ritenendo impossibile regolarne l'attacco sulla santonina. Per vero dire, non erano soli a pensarla così; nei trattati di chimica e nella mente di molti studiosi di detta sostanza erasi infiltrata quest' idea, nata da lontane esperienze [3] e poco approfondite. Nel 1907, però, Angeli e Marino [4] dimostrarono che la santonina può subire l'ossidazione graduale e trovarono che, impiegando il permanganato di potassio in soluzione diluita e convenientemente raffreddata, si ottiene, come primo termine di una serie di prodotti di demolizione, una bi-ossisantonina $C_{15}H_{18}O_5$.

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica organica del R. Istituto di studî superiori in Firenze.

(²) Ber. d. deuts. Chem. Ges., *38*, 1845.

(³) Heldt, Ann. d. Chemie u. Phar. LXIII (1847), pp. 40-41.

(⁴) Atti della R. Accademia dei Lincei, 1907. Vol. XVI, fasc. 3°, 1° sem.