ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 febbraio 1918.

F. D' Ovidio Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle serie di potenze sommate col metodo di Borel generalizzato.* Nota II [1] di Gustavo Sannia, presentata dal Socio Enrico d'Ovidio.

6. Per costruire le infinite stelle di sommabilità σ, (5) e τ della serie (1) basta cercare i loro raggi

$$\text{(12)} \qquad OG \geq \cdots \geq OP_{-1} \geq OP_0 \geq OP_1 \geq \cdots \geq OT$$

sopra ogni singola semiretta p uscente dal centro comune O. E poichè (n. 3)

$$OG = \lim_{r=-\infty} OP_r \quad , \quad OT = \lim_{r=+\infty} OP_r ,$$

basta cercare i raggi OP_r.

Limitiamoci dunque a considerare la (1) nei soli punti $z = \varrho e^{i\theta}$ di argomento assegnato θ (inclinazione di p sul semiasse positivo).

Premesso che l' integrale (3), col porre $z = \varrho e^{i\theta}$, $\varrho a = b$, si trasforma [2] in

$$\text{(3)}' \qquad \varrho^{r-1} e^{ri\theta} \int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varrho}} u^{(r)}(be^{i\theta}, 1)\, db ,$$

esaminiamo il comportamento della funzione

$$\text{(13)} \qquad f_{r-1}(b, \varrho) = e^{-\frac{b}{\varrho}} u^{(r-1)}(be^{i\theta}, 1) = z^{1-r} e^{-a} u^{(r-1)}(a, z)$$

[1] Per la Nota I cfr. questi Rendiconti, pag. 98.

[2] Come l' integrale (6) nel n. 4.

quando b tende a $+\infty$, per ogni valore di $\varrho > 0$, eccetto per $\varrho = \varrho_r$ e $\varrho = \varrho_{r-1}$, ove ϱ_r è il modulo del punto P_r.

Lemma. — *Quando b tende a $+\infty$, la funzione $f_{r-1}(b, \varrho)$: α) tende a zero se $0 < \varrho < \varrho_r$; β) non ha limite finito se $\varrho_r < \varrho < \varrho_{r-1}$; γ) ha il modulo non limitato se $\varrho_{r-1} < \varrho$.*

α) È stato già dimostrato incidentalmente al n. 4.

β) Osserviamo che, integrando per parti, si ha

$$\int_0^a e^{-a} u^{(r)}(a, z)\, da = e^{-a} u^{(r-1)}(a, z) - u_{r-1} z^{r-1} + \int_0^a e^{-a} u^{(r-1)}(a, z)\, da .$$

Ora in un punto z di p il cui modulo ϱ sia compreso fra ϱ_r e ϱ_{r-1}, questi esclusi (e quindi sia interno in senso stretto a σ_{r-1}, ma esterno a σ_r) la (1) è sommabile $(B, r-1)$, ma non (B, r); quindi, per $a = +\infty$, ha un limite finito l'integrale del secondo membro, ma non quello del primo membro; dunque neppure $e^{-a} u^{(r-1)}(a, z)$ può aver limite finito, e quindi, per la (13), $f_{r-1}(b, \varrho)$ non può aver limite finito per $b = +\infty$.

γ) Se $\varrho > \varrho_{r-1}$, assunto un numero ϱ' compreso fra ϱ e ϱ_{r-1}, questi esclusi, consideriamo la funzione di b

$$g(b) = b^2 e^{-\frac{b}{\varrho'}} u^{(r-1)}(b e^{i\theta}, 1).$$

Tendendo b a $+\infty$, il suo modulo non può restare limitato, altrimenti l'integrale (3)', ove si cambi r in $r-1$, sarebbe convergente (assolutamente) [1], quindi la (1) sarebbe sommabile $(B, r-1)$ nel punto (ϱ', θ) esterno alla stella σ_{r-1} (il che è impossibile). Ed allora *a fortiori* non resterà limitato il modulo della funzione (13), perchè, essendo $\varrho > \varrho'$, si ha (a partire da un certo $b > 0$)

$$e^{b\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho}\right)} > b^2 \quad \text{o} \quad e^{-\frac{b}{\varrho}} > b^2 e^{-\frac{b}{\varrho'}} \quad \text{da cui} \quad |f_{r-1}(b, \theta)| > |g(b)| .$$

Dal lemma segue subito il

Teorema. — *La lunghezza ϱ_r del raggio OP_r della stella σ_r è il limite superiore dei valori di ϱ per i quali la funzione $f_{r-1}(b, \theta)$ ha un limite finito (che è necessariamente nullo) per $b = +\infty$.*

Altrimenti: *su ogni semiretta p uscente da O l'estremo P_r del raggio OP_r della stella σ_r è il limite dei punti z di p nei quali*

$$\lim_{a=+\infty} e^{-a} u^{(r-1)}(a, z) = 0 . \tag{14}$$

[1] Infatti il modulo del suo integrando vale $b^{-2} g(b)$, ed è ben noto che:

$$\int_0^\infty b^{-k} g(b)\, db$$

convergente, se $k > 1$ e $g(b)$ resta limitata quando b tende a $+\infty$.

7. Sia $z = \varrho e^{i\theta}$ un punto P interno in senso stretto al raggio OG della stella σ e giacente su p. P è necessariamente anche interno in senso stretto al raggio OP_r di qualcuna σ_r delle stelle (5), quindi (n. 4) in esso la (1) è assolutamente sommabile (B, $r-1$) ed ha per somma (n. 2)

$$(15) \qquad u(z) = U_{r-2}(z) + \int_0^\infty e^{-a}\, u^{(r-1)}(a, z)\, da\,,$$

ove $U_{r-2}(z)$ vale zero se $r < 2$ ed è un polinomio se $r \geq 2$; ossia, applicando le solite trasformazioni,

$$(15)' \qquad u(\varrho e^{i\theta}) = U_{r-2}(\varrho e^{i\theta}) + \varrho^{r-2}\, e^{(r-1)i\theta} \int_0^\infty e^{-\frac{b}{\varrho}}\, u^{(r-1)}(b e^{i\theta}, 1)\, db\,,$$

ove l'integrale è assolutamente convergente.

Ora, detta η una variabile complessa, consideriamo i due integrali

$$(16) \qquad \int_0^\infty e^{-\frac{b}{\eta}}\, u^{(r-1)}(b e^{i\theta}, 1)\, db \quad , \quad \int_0^\infty \frac{b}{\eta^2}\, e^{-\frac{b}{\eta}}\, u^{(r-1)}(b e^{i\theta}, 1)\, db\,.$$

Il modulo di ciascuno degli integrandi (di cui il secondo è la derivata del primo rispetto a η) è minore del modulo dell'integrando di (15') (almeno a partire da un certo $b > 0$) se la parte reale di $\frac{1}{\eta}$ è maggiore di $\frac{1}{\varrho}$ [1] o (come subito si vede) se η è interno in senso stretto al cerchio C che ha per diametro OP. Ne segue che gli integrali (16) sono convergenti uniformemente in ogni area interna a C e perciò che il secondo rappresenta la derivata del primo rispetto a η; sicchè questo è funzione analitica olomorfa di η nell'interno di C, anzi nell'interno del cerchio che ha per diametro OG, perchè P può prendersi su OG vicino a G quanto si vuole.

Tale sarà quindi anche la funzione

$$U_{r-2}(\eta e^{i\theta}) + \eta^{(r-2)}\, e^{(r-1)i\theta} \int_0^\infty e^{-\frac{b}{\eta}}\, u^{(r-1)}(b e^{i\theta}, 1)\, db$$

che, col porre $\eta e^{i\theta} = \zeta$ (che cade ancora nel detto cerchio) diventa

$$(17) \qquad \varphi(\zeta) = U_{r-2}(\zeta) + \zeta^{r-2}\, e^{i\theta} \int_0^\infty e^{-\frac{kb}{\zeta}}\, u^{(r-1)}(b e^{i\theta}, 1)\, db\,, \quad (k = e^{i\theta}).$$

[1] Per il primo integrando la cosa è evidente. Per il secondo basta dimostrare che si ha $|b\eta^{-2} e^{-\frac{b}{\eta}}| < e^{-\frac{b}{\varrho}}$. Posto $\eta = te^{i\alpha}$, questa diventa

$$t^{-2} b e^{-\frac{b\cos\alpha}{t}} < e^{-\frac{b}{\varrho}} \quad \text{o} \quad t^{-2} b < e^{kb} \quad \text{ove} \quad k = \frac{\cos\alpha}{t} - \frac{1}{\varrho}$$

ed è certamente soddisfatta (a partire da un certo b) se $k > 0$, cioè se la parte reale di $\frac{1}{\eta}$ è maggiore di $\frac{1}{\varrho}$.

Intanto, quando ζ cade sul diametro OG, cioè $\zeta = \varrho e^{i\theta}$, $\varphi(\zeta)$ coincide con $u(z)$, come risulta dal confronto con la (15)', dunque:

Teorema [1]. — *La somma $u(z)$ della serie* (1) *su ogni raggio della stella σ assume i valori di una funzione analitica che è olomorfa nell'interno in senso stretto del cerchio che ha per diametro il raggio stesso.*

8. Fin qui non abbiamo fatta alcuna ipotesi sul cerchio di convergenza γ della (1), anzi di esso non ci siamo mai serviti. *Ora supponiamo che il suo raggio non sia nullo.*

Allora la somma $u(z)$ della serie è funzione analitica olomorfa in γ, anzi, come ha dimostrato il Borel (loc. cit., cap. IV) nella stella τ.

Per il teorema precedente, questa funzione può proseguirsi analiticamente in ogni cerchio che abbia per diametro un raggio OG di σ, conservandosi olomorfa in ogni cerchio che abbia per diametro OG' (ove G' è un punto interno ad OG) *contorno incluso.*

Ne segue [2] che la (1) è assolutamente sommabile in G', cioè che G' appartiene anche al raggio corrispondente OT della stella τ; ma G' è un punto qualunque di OG; dunque non solo i punti interni a OT cadono in OG (come accade sempre), ma qui anche viceversa, e perciò OG e OT coincidono, e con essi coincidono necessariamente i raggi OP_r delle stelle (5). Concludendo;

Per una serie (1) *con raggio di convergenza non nullo tutte le stelle di sommabilità σ,* (5) *e τ coincidono.*

Dunque per una tal serie il metodo di Borel generalizzato non dà quasi nulla più che il metodo originario (B, o) limitato alle serie assolutamente sommabili. Diciamo « quasi » perchè *non è escluso che esso possa sommare la* (1) *in punti del contorno di τ nei quali la* (1) *non sia assulutamente sommabile* [3]. Sicchè la sua maggiore potenza può efficacemente esplicarsi solo sopra serie con raggio di convergenza nullo.

Osserviamo per finire che per le serie che qui consideriamo la determinazione dei raggi OT della (unica) stella di sommabilità τ è più semplice, poichè essi coincidono con quelli di una qualsiasi delle stelle σ_r, dati dal teorema del n. 6.

[1] È l'estensione alla stella σ di un teorema di Borel relativo alla stella τ (*Leçons sur les séries divergente*, pag. 118). Esso ci dà ragione di molte proprietà della funzione $u(z)$ dimostrate nelle Note citate al n. 1.

[2] Per il teorema di Borel (loc. cit., pag. 122): se la funzione analitica $u(z)$ somma della (1) è olomorfa nell'interno di una circonfereaza passante pel punto O *e sulla circonferenza*, la serie (1) è assolutamente sommabile sul diametro che passa per O, *estremi inclusi.*

[3] Per tal rispetto sta alla teoria delle serie assolutamente sommabili, come il metodo di sommazione di Cesàro sta al metodo classico, perchè il metodo di Cesàro non può sommare la (1) che in punti del contorno del suo cerchio di convergenza (oltre che nei punti interni).