ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Fisica terrestre. — *Sulla propagazione delle onde sismiche.* Nota III del Socio C. Somigliana.

I.

Ho accennato, in fine della Nota II ([1]), alla possibilità di ottenere pel rapporto $V_1 : V_2$ delle velocità superficiali, calcolato secondo la teoria, un valore che maggiormente si approssimi a quelli osservati per il rapporto $V_P : V_S$ delle velocità di propagazione delle onde prime e seconde, mediante una variazione del valore 1:4 generalmente ammesso pel coefficiente σ di Poisson relativo alla terra. Questo valore 1:4 è desunto dal valore medio che quel coefficiente ha pei materiali superficiali terrestri. Niente ci autorizza ad ammettere che esso debba conservarsi inalterato pei materiali sconosciuti dell'interno. È più naturale quindi di cercarne il valore per via indiretta in base ai dati forniticì dalle osservazioni sismiche.

Procedendo con questo criterio noi dovremmo cercare quali siano i valori di σ che fanno assumere al rapporto $V_1 : V_2$ valori compresi fra 1,80 e 1,85 ([2]). Questi valori sono confermati da un gran numero di osservazioni ed indirettamente dal calcolo delle distanze epicentrali. A ragione quindi il prof. De Marchi ed il prof. Oddone hanno richiamato la mia attenzione sulla discordanza fra questi valori ed il valore 1,12 a cui io ero giunto accettando per σ il valore 1:4.

Volendo studiare la quistione da un punto di vista generale, senza entrare in troppo complicate questioni analitiche, conviene esaminare i limiti entro cui varia il valore del rapporto $\sqrt{\eta_1} : \sqrt{\eta_2}$ delle due maggiori radici della equazione di Rayleigh, quando σ varia fra i limiti che a questo coefficiente assegna la teoria dell'elasticità.

Ora i limiti imposti ai coefficienti elastici di un materiale isotropo sono determinati dalla condizione di stabilità dell'equilibrio elastico, che si traduce nell'altra che l'energia elastica sia rappresentata da un'espressione essenzialmente positiva. Questa espressione colle notazioni solite, e introducendo le costanti λ, μ di Lamé, è la seguente:

$$2E = \lambda(x_x + y_y + z_z)^2 + 2\mu(x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \tfrac{1}{2}y_z^2 + \tfrac{1}{2}z_x^2 + \tfrac{1}{2}x_y^2)$$

([1]) Vol. XXVI, pag. 472 di questi Rendiconti, 6 maggio 1917.

([2]) Prendo questi valori dall'accurato lavoro eseguito dal prof. Rizzo sui dati del terremoto di Messina del 28 dicembre 1908. Essi risultano da una tabella relativa alla propagazione fino a 11000 chilometri, costruita in base alle osservazioni raccolte in 110 stazioni sismiche. G. B. Rizzo, *Sulla propagazione dei movimenti prodotti dal terremoto di Messina del 28 dicembre 1908*. Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino, tomo LXI, 1911.

e le condizioni di positività di questa forma quadratica sono

$$3\lambda + 2\mu > 0 \qquad \mu > 0$$

e quindi, poichè

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

risultano per il coefficiente di Poisson i seguenti limiti:

$$-1 < \sigma < \frac{1}{2}.$$

Il valore estremo superiore $1:2$ si ha nel caso della incompressibilità del mezzo, $\lambda = \infty$. Il rapporto $b^2:a^2$ dei quadrati delle velocità di propagazione delle onde trasversali e longitudinali si annulla in questo caso. Mentre per $\sigma = -1$ si ha $b^2:a^2 = 3:4$, ed il modulo di compressione $\lambda + 2/3\,\mu$ si annulla. Come si vede, questi limiti non escludono la possibilità di valori negativi pel coefficiente di Poisson. Anche lord Rayleigh nella classica Memoria *On waves propagated*..., che è il punto di partenza della nostra ricerca, insiste sopra questa possibilità, quantunque non sia generalmente presa in considerazione dai fisici.

Ora il risultato finale a cui si arriva esaminando l'intervallo entro cui varia il rapporto $\sqrt{\eta_1}:\sqrt{\eta_2}$, quando si assumono per σ tutti i valori possibili meccanicamente, può essere riassunto nelle considerazioni seguenti.

L'ipotesi meno restrittiva, che si può fare per il valore del coefficiente σ, relativo alla terra presa nel suo insieme, è che esso sia la media di tutti i valori possibili secondo la teoria meccanica della elasticità; cioè sia

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Se si assume per σ questo valore, si trova pel rapporto $\sqrt{\eta_1}:\sqrt{\eta_2}$ un valore che differisce pochissimo da quelli osservati per il rapporto $V_P:V_S$.

Infatti pel valore precedente di σ si ha $b^2:a^2 = 3:5$, e l'equazione di Rayleigh (Nota I, 19) prende la forma

$$F(\eta) = 5\eta^3 - 40\eta^2 + 72\eta - 32 = 0.$$

Questa equazione ha le radici reali, e per esse si possono assegnare i seguenti valori approssimati per difetto a meno di un millesimo:

$$\eta_1 = 5{,}653 \qquad \eta_2 = 1{,}668 \qquad \eta_3 = 0{,}678.$$

Abbiamo così

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = 3{,}389 \qquad \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}} = \frac{V_1}{V_2} = 1{,}84.$$

Questo valore concorda perfettamente coi valori del rapporto $V_P:V_S$ ricavato dalle osservazioni delle onde prime e seconde, rapporto che ha effettivamente significato di una costante terrestre, poichè varia entro limiti ristrettissimi, quantunque V_P e V_S, prese isolatamente, siano invece crescenti con la distanza dall'epicentro. Non altrettanto può dirsi degli altri due rapporti, in cui compare V_L; e quindi un confronto coi nostri valori teorici non presenta notevole interesse.

Possiamo quindi concludere che l'accordo fra l'ipotesi enunciata da noi e l'osservazione è possibile assumendo per il coefficiente di Poisson il valore $-1:4$. Questo valore è meccanicamente possibile; non discuteremo qui della sua possibilità fisica.

Ci proporremo invece di enunciare un'altra interpretazione dei risultati teorici esposti, per la quale questa ed altre difficoltà non si presentano. Notiamo anzitutto che la propagazione, studiata da noi, nel suolo illimitato, non riguarda la fase iniziale, quando le onde partenti dall'ipocentro non sono ancora giunte in superficie e si può effettivamente pensare che l'onda longitudinale proceda separata dalla trasversale, come si suole comunemente ammettere dai sismologi. La nostra soluzione riguarda piuttosto una fase di regime, quando tutte le onde sono arrivate alla superficie del suolo. Ora osservazioni recenti hanno permesso di distinguere fra le onde superficiali, che costituiscono le onde lunghe, varî gruppi, pei quali furono determinate le corrispondenti velocità di propagazione. Queste velocità variano pochissimo colla distanza dall'epicentro, sono cioè sensibilmente costanti sulla superficie terrestre. Nella già citata Memoria del prof. Rizzo sono classificati tre gruppi di queste onde, le cui velocità di propagazione V_1^*, V_2^*, V_3^* fra 500 e 11000 chilometri variano fra i seguenti limiti:

$$V_1^* \text{ fra } 4{,}2 \text{ e } 4{,}7 \ \frac{\text{Km.}}{\text{sec.}}$$
$$V_2^* \ \text{»} \ 3{,}6 \ \text{»} \ 4{,}0 \ \text{»}$$
$$V_3^* \ \text{»} \ 3{,}2 \ \text{»} \ 3{,}5 \ \text{»}$$

Si può allora fare l'ipotesi che siano questi i tre gruppi di onde che corrispondono alle tre onde da noi studiate teoricamente. I valori di V_1^*, V_2^*, V_3^* possono effettivamente essere considerati come costanti sulla superficie, come le velocità superficiali delle onde teoriche. Inoltre i valori del rapporto $V_1^*:V_2^*$ dati dalle osservazioni, variano entro limiti assai ristretti. Dalla tabella, calcolata dal prof. Rizzo alla fine della sua Memoria, risultano per questo rapporto valori compresi fra 1,12 e 1,20 ed un valor medio uguale a 1,15.

Ora questi valori si accordano col valore del rapporto teorico $V_1:V_2$ che noi abbiamo calcolato, nell'ipotesi che fosse $\sigma = 1:4$ (Nota II). Questo valore era

$$V_1^*:V_2^* = 1{,}12\,.$$

Possiamo quindi ritenere che esso concordi con questa nuova ipotesi. Essa è quindi compatibile col valore ordinariamente accettato pel coefficiente di Poisson relativo agli strati superficiali terrestri, che è anche la media dei valori *positivi* meccanicamente possibili per tale coefficiente.

Minore è l'accordo invece fra i valori teorici ed i valori d'osservazione per l'altro rapporto $V_1 : V_3$, risultando questi più piccoli dei primi. Abbiamo trovato pel valore teorico 2,17, mentre i valori risultanti dalla tabella del prof. Rizzo sono compresi fra 1,26 e 1,35. Mi mancano attualmente altri dati per poter istituire un confronto più esteso.

Riassumendo, possiamo dire che lo studio teorico del problema della propagazione delle onde piane in un suolo piano, omogeneo, isotropo, illimitato ci ha condotti ad una generalizzazione della soluzione trovata da lord Rayleigh nella sua classica Memoria *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid* del 1885. Siamo così stati condotti alla dimostrazione dell'esistenza di due altri sistemi di onde, oltre quelli scoperti da lord Rayleigh. Queste onde esistono qualunque sia il valore della costante di Poisson, che si attribuisce al mezzo vibrante, purchè compreso fra i limiti -1 e $1:2$, assegnati dalla teoria.

Questo risultato teorico permette di analizzare da un punto di vista generale la possibilità di trovare una rappresentazione meccanica delle onde sismiche mediante la teoria delle onde piane in un suolo piano illimitato.

Due di queste possibilità abbiamo preso in esame. La prima, e più seducente, consiste nell'assimilare le tre onde tipiche dei sismogrammi (P) (S) (L) alle tre onde connesse colle tre radici dell'equazione di Rayleigh. La conclusione a cui siamo giunti nell'esame di questa ipotesi è che l'accordo coi dati numerici sperimentali è possibile, quando si ammetta che il valore del coefficiente di Poisson per la Terra sia la media di tutti i valori meccanicamente ammissibili, cioè $-1:4$. Qualora non si vogliano ammettere valori negativi per il coefficiente di Poisson, sarebbe questo risultato un argomento di condanna per l'ipotesi enunciata, naturalmente nella supposizione che il suolo indefinito sia un modello sufficiente per la rappresentazione delle oscillazioni sismiche.

L'altra possibilità che abbiamo considerata è che la teoria delle onde associate serva unicamente alla interpretazione meccanica delle onde lunghe, ordinariamente considerate come onde superficiali. È possibile allora trovare delle concordanze numeriche coi dati d'osservazione, senza abbandonare l'ordinario assunto, che il coefficiente di Poisson per la Terra sia uguale alla media dei valori *positivi* meccanicamente possibili, o anche alla media dei valori effettivamente misurati sui materiali della superficie terrestre.

Solo un esame più approfondito dei sismogrammi potrà decidere quale di queste ipotesi possa essere accettata, o rifiutata.

II.

Per completare l'analisi del problema meccanico studiato nelle due Note precedenti, riprendiamo l'equazione di Rayleigh per le velocità [(19), Nota I]. Introducendo la costante

$$\tau = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{2(1-\sigma)}$$

quell'equazione diviene

$$\eta^3 - 8\eta^2 + 8(1+2\tau)\eta - 16\tau = 0 . \tag{1}$$

Ci proponiamo di studiare come variano le radici di questa equazione quando τ assume tutti i valori corrispondenti ai valori possibili per σ, cioè

$$\frac{1}{4} \leq \tau \leq 1 .$$

L'equazione (1) si riduce a forma canonica ponendo

$$\eta = \xi + \frac{8}{3}$$

e diviene

$$\xi^3 + \frac{8}{3}(6\tau - 5)\xi + \frac{16}{3}\left(5\tau - \frac{28}{9}\right) = 0 .$$

La condizione perchè le tre radici siano reali si può così scrivere

$$3^6 \varDelta(\tau) = (45\tau - 28)^2 + (12\tau - 10)^3 < 0 .$$

Ora

$$\text{per } \tau = \frac{28}{45} = 0{,}622\ldots \quad \text{si ha} \quad \varDelta(\tau) < 0$$

$$\text{per } \tau = \frac{10}{12} = 0{,}833\ldots \quad \text{si ha} \quad \varDelta(\tau) > 0 .$$

Esiste quindi un valore τ' di τ, compreso fra i limiti indicati, per il quale si ha

$$\varDelta(\tau') = 0 .$$

Per questo valore si trova $\tau' = 0{,}6790$ e pel corrispondente valore σ' di σ si ha

$$\sigma' = 0{,}2637$$

cioè un valore di poco superiore al valore 0,25 solitamente assunto per σ. Questi valori sono approssimati per difetto.

Questo valore σ' di σ è anche quello per cui le due radici dell'equazione di Rayleigh, superiori all'unità, divengono uguali. Possiamo quindi concludere:

Le tre radici dell'equazione di Rayleigh sono reali per

$$-1 \leq \sigma \leq \sigma' .$$

L'equazione ha invece due radici complesse per

$$\sigma' < \sigma \leq \frac{1}{2} .$$

Il rapporto delle due radici $\eta_1 : \eta_2$ è uguale alla unità per $\sigma = \sigma'$ e va crescendo quando σ decresce fino a -1. È facile verificare che quando $\sigma = 0$, ha cioè il minimo valore non negativo, la radice quadrata di questo rapporto è ancora inferiore al valore minimo 1,80 fornito dalle osservazioni. Si ha infatti, per $\sigma = 0$, $\tau = 1:2$; è il caso dei corpi che possono allungarsi senza sensibile contrazione trasversale. L'equazione di Rayleigh diviene

$$\eta^3 - 8\eta^2 + 16\eta - 8 = 0$$

e si può scrivere

$$(\eta^2 - 6\eta + 4)(\eta - 2) = 0 .$$

Le sue radici sono quindi

$$\eta_1 = 3 + \sqrt{5} \qquad \eta_2 = 2 \qquad \eta_3 = 3 - \sqrt{5}$$

e si ha per il rapporto delle prime due

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) = 2{,}61 \qquad \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}} = 1{,}56 .$$

Conviene perciò raggiungere come si è visto il valore $\sigma = -0{,}25$ per ottenere un valore non inferiore ad 1,80.

Per $\sigma = 1:2$ si ha il caso dell'incompressibilità considerato anche da lord Rayleigh. Gli integrali del moto vibratorio da noi trovati hanno valore anche in questo caso, in cui, come per tutti i valori di σ superiori a σ', le prime due radici divengono complesse. Vedremo in seguito quale sia la forma che questi integrali assumono.

Notiamo finalmente che i valori delle tangenti dei due angoli d'emergenza delle due onde associate si mantengono sempre reali pei valori di σ compresi fra -1 e σ'; esse non possono perciò mai degenerare in onde di Rayleigh. Si aveva per queste tangenti

$$\mathrm{tg}^2\theta_a = \eta\frac{b^2}{a^2} - 1 \qquad \mathrm{tg}^2\theta_b = \eta - 1 .$$

Per i valori di σ uguali a -1, $-1:4$, 0 il rapporto $b^2 : a^2$ ha rispettivamente i valori $3:4$, $3:5$, $1:2$; e si può verificare che i valori di η_1, η_2 sono rispettivamente maggiori di $4:3$, $5:3$, 2. Per $\sigma = -1:4$ abbiamo trovato

$$\eta_1 = 5{,}653 \qquad \eta_2 = 1{,}668 .$$

Abbiamo perciò per determinare gli angoli di emergenza corrispondenti a queste due radici

$$\operatorname{tg}^2\theta_a = 2{,}3918 \qquad \operatorname{tg}^2\theta_b = 4{,}653$$
$$\operatorname{tg}^2\theta_a = 0{,}0008 \qquad \operatorname{tg}^2\theta_b = 0{,}668\,.$$

La direzione di propagazione della seconda onda longitudinale è perciò pochissimo inclinata sul suolo.

III.

Per trovare finalmente quale sia la forma delle vibrazioni che corrispondono al caso in cui l'equazione di Rayleigh ha due radici complesse, ricordiamo le espressioni generali trovate per le componenti di vibrazione [1]:

$$u = \frac{1}{2\operatorname{tg}\theta_a}\,\Psi(z\operatorname{tg}\theta_a + x - \mathrm{V}t) + \frac{\operatorname{tg}\theta_b}{1 - \operatorname{tg}^2\theta_b}\,\Psi(z\operatorname{tg}\theta_b + x - \mathrm{V}t)$$

$$w = \frac{1}{2}\,\Psi(z\operatorname{tg}\theta_a + x - \mathrm{V}t) - \frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2\theta_b}\,\Psi(z\operatorname{tg}\theta_b + x - \mathrm{V}t)\,,$$

dove

$$\mathrm{V} = b\sqrt{\eta} \qquad \operatorname{tg}^2\theta_a = \frac{b^2}{a^2}\,\eta - 1 \qquad \operatorname{tg}^2\theta_b = \eta - 1\,,$$

essendo η una radice qualunque dell'equazione di Rayleigh. Quando $\eta < 1$ si hanno per $\operatorname{tg}\theta_a$, $\operatorname{tg}\theta_b$ valori puramente immaginarî, per V un valore reale; e si hanno allora le onde propriamente dette di Rayleigh. Ma quando η è complessa, risultano valori complessi per tutte queste costanti. A cagione della omogeneità delle equazioni del moto, dagli integrali precedenti si possono ancora dedurre, prendendone la parte reale o la parte immaginaria, integrali reali, di cui possiamo vedere sommariamente la forma. Supponiamo

$$\eta = \alpha + i\beta\,.$$

Dalle formole precedenti avremo

$$\operatorname{tg}^2\theta_a = \alpha\frac{b^2}{a^2} - 1 + i\,\frac{b^2}{a^2}\,\beta \qquad \operatorname{tg}^2\theta_b = \alpha - 1 + i\beta \qquad \mathrm{V} = b\sqrt{\alpha + i\beta}\,.$$

Ricordando che dalla relazione

$$\mathrm{A} + i\mathrm{B} = \sqrt{\alpha + i\beta}$$

si ricava

$$\mathrm{A} = \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \mathrm{B} = \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

[1] Per un'inesattezza di calcolo nelle formole (23) (23′) (24) della Nota I, e nelle corrispondenti della Nota II, figurano indebitamente le costanti α_1, α_2. Esse devono porsi entrambe uguali all'unità; perciò anche il loro rapporto non può essere arbitrariamente fissato, come è detto alla fine della Nota I.

è facile calcolare i valori della parte reale e della immaginaria di $\operatorname{tg}\theta_a$, $\operatorname{tg}\theta_b$, V. Per brevità scriveremo

$$\operatorname{tg}\theta_a = A_1 + i B_1 \qquad \operatorname{tg}\theta_b = A_2 + i B_2 \quad , \quad V = V_1 + i V_2 .$$

Le espressioni che formano l'argomento della funzione Ψ divengono

$$z \operatorname{tg}\theta_a + x - Vt = (A_1 + i B_1) z + x - (V_1 + i V_2) t$$
$$z \operatorname{tg}\theta_b + x - Vt = (A_2 + i B_2) z + x - (V_1 + i V_2) t .$$

Perciò se supponiamo che la funzione $\Psi(\xi)$ abbia la solita forma

$$\Psi(\xi) = e^{ic\xi} ,$$

ove c è la costante che determina la frequenza della vibrazione, troviamo

$$\Psi(z \operatorname{tg}\theta_a + x - Vt) = e^{-c(B_1 z - V_2 t) + ic(A_1 z + x - V_1 t)}$$
$$\Psi(z \operatorname{tg}\theta_b + x - Vt) = e^{-c(B_2 z - V_2 t) + ic(A_2 z + x - V_1 t)} .$$

Perciò la velocità di propagazione superficiale che compete alle onde corrispondenti alle due radici complesse coniugate, è la stessa

$$V_1 = \frac{b}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + a\right)^{\frac{1}{2}}$$

e vengono così a sovrapporsi nella propagazione in superficie le due coppie di onde associate corrispondenti.

Il fattore esponenziale dipende, oltre che dalla profondità z, anche dal tempo. Abbiamo quindi uno smorzamento della vibrazione, in senso generale, non solo rispetto alla profondità, ma anche nel tempo.

Il caso dell'incompressibilità del materiale vibrante, caso che è stato preso in considerazione anche da lord Rayleigh, rientra in questi ora studiati; si ha infatti in questo caso $\sigma = 1:2$. I valori $\alpha \pm i\beta$ delle radici complesse sono stati calcolati da lord Rayleigh (*), il quale ha trovato

$$\eta = 3{,}5436 \pm 2.2301\, i .$$

(*) (Scient. Papers, vol. II, pag. 444). Per la radice reale lord Rayleigh trova 0,91275, valore che è stato corretto da Bromwich in 0,91262 (Bromwich, *On the Influence of Gravity on Elastic Waves, and, in particular, on the Vibrations of an Elastic Globe* (Proc. London Math. Soc., vol. XXX, pag. 103).