ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 marzo 1918.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla integrazione dell'equazione*

(I) $$rt - s^2 + c(p^2 + q^2)^2 = 0 .$$

Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Sia $z = z(x, y)$ una superficie integrale dell'equazione (I), dove c indica una costante. Denotando con K la curvatura (totale) di S e con θ l'angolo che la sua normale forma coll'asse Oz, abbiamo

$$K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2} \quad , \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} ,$$

onde la (I) si traduce per la (S) nella proprietà geometrica espressa dalla equazione seguente:

(I*) $$K + c \operatorname{sen}^4 \theta = 0 .$$

Distinguendo i due casi della costante c positiva, ovvero negativa, porremo $c = \frac{1}{a^4}$ o $c = -\frac{1}{a^4}$ rispettivamente e dimostreremo quanto segue.

1° caso: $c = \frac{1}{a^4}$. — L'integrazione della equazione

(1) $$rt - s^2 + \frac{(p^2 + q^2)^2}{a^4} = 0$$

si riporta, in generale, a quella della nota equazione

(2) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \, \partial \beta} + \varphi = 0$$

che si sa integrare completamente per funzioni di Bessel (Du Bois Reymond); ed in un caso particolare (per superficie rigate) all'altra

$$(2^*) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \, \partial \beta} = 0$$

d'integrazione immediata. Da ogni soluzione nota della (2) si ottiene, per quadrature colle formole di Lelieuvre, una superficie S (non rigata) integrale della (1). Quanto alle rigate, che si deducono similmente dalle soluzioni della (2*), sono conoidi rette con generatrici rispettivamente parallele a quelle dell'elicoide rigata ad area minima e poste con queste in un piano normale all'asse.

Come per le superficie pseudosferiche, così anche per le superficie integrali della (1) esistono *trasformazioni asintotiche* (per congruenze W) che appartengono alla classe delle trasformazioni di Bäcklund. Esse cangiano in particolare le rigate della classe (1) in altre rigate.

2° caso: $c = -\frac{1}{a^4}$. — L'integrazione della corrispondente equazione

$$(3) \qquad rt - s^2 = \frac{(p^2+q^2)^2}{a^4}$$

si riconduce a quella della celebre equazione della fisica matematica

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} + \varphi = 0 ,$$

alla quale viene così attribuito un nuovo significato geometrico.

Per le superficie integrali della (3) le trasformazioni asintotiche, applicate una prima volta, riescono essenzialmente immaginarie; ma anche qui basta comporre due tali trasformazioni coniugate immaginarie per dedurne trasformazioni *reali*, che si interpretano in semplici formole per le soluzioni della equazione (4).

2. In un primo modo stabiliamo i risultati ora indicati riferendoci a formole generali per la rappresentazione sferica, le quali si prestano utilmente in molte altre ricerche.

Si sa che sulla sfera di Gauss le immagini sferiche (α, β) per le linee asintotiche di una superficie non possono scegliersi ad arbitrio, ma debbono soddisfare alla condizione (necessaria e sufficiente) del Dini

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1 = \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}_1 ,$$

dove i simboli di Christoffel $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}_1$, $\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}_1$ s'intendono calcolati per l'ele-

mento lineare sferico in coordinate α, β. Se con $K = -\frac{1}{\varrho^2}$ si indica la curvatura della superficie, si ha

$$(5^*) \qquad \frac{d \log \varrho}{\partial \alpha} = -2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}_1 , \quad \frac{\partial \log \varrho}{\partial \beta} = -2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}_1 ,$$

e la superficie corrispondente è individuata a meno di un'omotetia.

Sia ora

$$(6) \qquad ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$$

l'elemento lineare sferico riferito a coordinate curvilinee u, v arbitrarie, e si domandi di cangiare le u, v in altre variabili α, β, rispetto alle quali sia soddisfatta la condizione (5) del Dini. Procedendo come per le equazioni di Darboux relative alle asintotiche virtuali nel problema della deformazione [1], si trova che le u, v, quali funzioni di α, β, debbono soddisfare al sistema di equazioni del 2° ordine del tipo iperbolico:

$$(A) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} + \dfrac{\partial \log \varrho}{\partial u}\right] \dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + \\ \quad + \left[\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \varrho}{\partial v}\right]\left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial u}{\partial\beta} + \left[\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \varrho}{\partial u}\right] \times \\ \quad \times \left(\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} + \dfrac{\partial u}{\partial\beta}\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\right) + \left[\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} + \dfrac{\partial \log \varrho}{\partial v}\right]\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial\beta} = 0, \end{cases}$$

dove i simboli $\begin{Bmatrix} ik \\ \varrho \end{Bmatrix}$ si riferiscono all'elemento lineare sferico (6) e per $\varrho = \varrho(u, v)$ s'intende una funzione assegnata arbitrariamente di u, v. Le (A) sono appunto le equazioni per le *immagini virtuali* di asintotiche che volevamo stabilire, e corrispondono esattamente alle indicate equazioni di Darboux. Esse possono servire a trattare il problema di trovare le superficie per le quali la curvatura K è un'assegnata funzione della giacitura del piano tangente (di p, q) [2]. Ne risulta in particolare: *esiste una ed una sola superficie della classe con due curve sferiche assegnate quali immagini sferiche di due asintotiche di diverso sistema.*

Se la superficie è a curvatura positiva, si avranno formole reali analoghe alle (A), riferendosi alle immagini sferiche (α, β) di un sistema *isotermo-coniugato* sulle superficie. Le formole si scrivono ora:

[1] Cfr. Darboux, *Leçons* etc., t. III, pag. 290, e la mia Nota: *Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili* (Atti dell'Accademia d Torino, vol. XL, 1905).

[2] Si tratta qui dunque dell'equazione a derivate parziali $rt - s^2 = F(p, q)$.

$$
(\mathrm{B})\quad \begin{cases}
\Delta_2 u + \left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} + \dfrac{\partial \log \varrho}{\partial u} \right] \Delta_1 u + \\
\qquad\qquad + \left[2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \dfrac{\partial \log \varrho}{\partial v} \right] \nabla(u, v) + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \Delta_1 v = 0 \\
\Delta_2 v + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \Delta_1 u + \\
\quad + \left[2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + \dfrac{\partial \log \varrho}{\partial u} \right] \nabla(u, v) + \left[\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} + \dfrac{\partial \log \varrho}{\partial v} \right] \Delta_1 v = 0 ,
\end{cases}
$$

dove per $K = \dfrac{1}{\varrho^2}$ s'intende una funzione arbitraria prefissata di u, v e si è posto, colle consuete notazioni,

$$
\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \quad , \quad \Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 ,
$$

$$
\nabla(u, v) = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial v}{\partial \beta} , \quad \text{ecc.}
$$

Queste equazioni (B) appartengono ora al tipo ellittico e si possono applicare i noti teoremi sulle equazioni di questo tipo al corrispondente problema (di Minkowski).

3. Particolarizziamo le coordinate sferiche u, v nelle ordinarie geografiche, che dànno al ds^2 la forma

$$
ds^2 = du^2 + \operatorname{sen}^2 u \, dv^2 .
$$

Le equazioni fondamentali (A), (B) diventano rispettivamente

$$
(\mathrm{A}^*)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial \alpha \, \partial \beta} + \dfrac{\partial \log \varrho}{\partial u} \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} \dfrac{\partial u}{\partial \beta} + \\
\qquad\qquad + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \log \varrho}{\partial v} \left(\dfrac{\partial u}{\partial \alpha} \dfrac{\partial v}{\partial \beta} + \dfrac{\partial u}{\partial \beta} \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} \right) - \operatorname{sen} u \cos u \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} \dfrac{\partial v}{\partial \beta} = 0 \\
\dfrac{\partial^2 v}{\partial \alpha \, \partial \beta} + \left(\cot u + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial \log \varrho}{\partial u} \right) \left(\dfrac{\partial u}{\partial \alpha} \dfrac{\partial v}{\partial \beta} + \dfrac{\partial u}{\partial \beta} \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} \right) + \dfrac{\partial \log \varrho}{\partial v} \dfrac{\partial v}{\partial \alpha} \dfrac{\partial v}{\partial \beta} = 0
\end{cases}
$$

$$
(\mathrm{B}^*)\quad \begin{cases}
\Delta_2 u + \dfrac{\partial \log \varrho}{\partial u} \Delta_1 u + \dfrac{\partial \log \varrho}{\partial v} \nabla(u, v) - \operatorname{sen} u \cos u \, \Delta_1 v = 0 \\
\Delta_2 v + \left(2 \cot u + \dfrac{\partial \log \varrho}{\partial u} \right) \nabla(u, v) + \dfrac{\partial \log \varrho}{\partial v} \Delta_1 v = 0 .
\end{cases}
$$

Applichiamo queste formole alle superficie della classe (I*) ponendo

$$\varrho = \frac{a^2}{\operatorname{sen}^2 u},$$

e distinguendo i due casi $K < 0$, $K > 0$.

1° caso: $K = -\frac{\operatorname{sen}^4 u}{a^4}$. — La seconda delle (A*) diventa

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0,$$

e la v è la somma di due funzioni: una di α, l'altra di β. Ma occorre suddistinguere il caso generale a) in cui v contiene tanto α che β, dallo speciale b) ove v dipende p. es. solo da α. Cangiando i parametri α, β possiamo fare

$$v = \alpha + \beta \quad \text{nel caso generale } a)$$
$$v = \alpha \quad \text{nel caso speciale } b).$$

Dopo ciò, cangiando nella prima delle (A*) la funzione incognita u nell'altra

$$\varphi = -\cot u,$$

essa ci dà per φ l'equazione

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \varphi = 0 \quad \text{nel caso } a)$$
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta} = 0 \quad \text{nel caso } b),$$

che sono appunto le annunciate forme normali (2), (2*). Ad ogni soluzione φ della (2), o della (2*), corrisponde così una superficie della nostra classe. Ma nel secondo caso b), le immagini sferiche delle asintotiche α essendo i meridiani $v =$ cost., la superficie è manifestamente rigata e le sue generatrici sono ortogonali all'asse z. Cercando direttamente queste conoidi rette, si trovano subito date dalle equazioni parametriche

$$x = V\cos v - u\operatorname{sen} v \quad , \quad y = V\operatorname{sen} v + u\cos v \quad , \quad z = \frac{v}{a^2},$$

con V funzione arbitraria di v. Esse si deducono dall'elicoide rigata ad area minima

$$x = u\operatorname{sen} v \quad , \quad y = u\cos v \quad , \quad z = \frac{v}{a^2}$$

colla costruzione indicata al n. 1.

Le attuali conoidi rette dànno le soluzioni comuni alle due equazioni del 2° ordine

$$\begin{cases} q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0 \\ rt - s^2 + \dfrac{(p^2+q^2)^2}{a^4} = 0 , \end{cases}$$

che formano dunque un sistema *in involuzione.*

2° caso: $K = \dfrac{\operatorname{sen}^4 u}{a^4}$. — La seconda delle (B*) diventa

$$\Delta_2 v = 0 ,$$

e cangiando il sistema isotermo coniugato (α, β) in un altro, possiamo porre senza alterare la generalità

$$v = \alpha .$$

Dopo ciò la prima delle (B*), cangiando la funzione incognita u nell'altra $\varphi = \cot u$, diventa l'annunciata equazione (4) della fisica matematica

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} + \varphi = 0 .$$

4. Un secondo modo di eseguire l'indicata riduzione del problema alle equazioni (2) o (4) si ha dalle formole di Lelieuvre [1] per una superficie riferita alle sue asintotiche (α, β), ovvero (per $K > 0$) ad un sistema (α, β) isotermo coniugato. I coseni di direzione *normalizzati* della normale sono

$$\xi = X\sqrt{\varrho} \quad , \quad \eta = Y\sqrt{\varrho} \quad , \quad \zeta = Z\sqrt{\varrho} ,$$

ed avendosi nel caso nostro

$$Z = \cos u \quad , \quad \sqrt{\varrho} = \frac{a}{\operatorname{sen} u} ,$$

ne segue che ξ, η sono legate dalla relazione quadratica

$$\xi^2 + \eta^2 = a^2 ; \tag{7}$$

e viceversa la (7) è caratteristica pel caso nostro.

Si tratta dunque di trovare le speciali equazioni di Moutard

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \, \partial \beta} = M\varphi \quad (\text{per } K < 0) , \tag{8}$$

o le altre

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} = M\varphi \quad (\text{per } K > 0) , \tag{8*}$$

[1] Vedi *Lezioni di Geometria differenziale*, vol. I, §§ 77 e 80.

che ammettono *due* soluzioni ξ, η legate dalla identità quadratica (7). Se poniamo corrispondentemente

$$\xi = a \cos \sigma \quad , \quad \eta = a \operatorname{sen} \sigma ,$$

ne dedurremo nel caso (8) le due equazioni per σ

$$\begin{cases} \operatorname{sen} \sigma \dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial \alpha \, \partial \beta} + \cos \sigma \dfrac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \dfrac{\partial \sigma}{\partial \beta} = - \mathrm{M} \cos \sigma \\ \cos \sigma \dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial \alpha \, \partial \beta} - \operatorname{sen} \sigma \dfrac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \dfrac{\partial \sigma}{\partial \beta} = \mathrm{M} \operatorname{sen} \sigma , \end{cases}$$

e per ciò

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \alpha \, \partial \beta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \frac{\partial \sigma}{\partial \beta} = - \mathrm{M} .$$

Se σ contiene insieme α e β si può porre $\sigma = \alpha + \beta$, indi $\mathrm{M} = -1$. Le corrispondenti superficie si hanno per quadrature dalle formole di Lelieuvre associando alle due soluzioni della (2)

$$\xi = a \cos (\alpha + \beta \quad , \quad \eta = a \operatorname{sen} (\alpha + \beta)$$

una terza ζ arbitraria.

Se σ dipende solo p. es. da α, si potrà fare $\sigma = \alpha$

$$\xi = a \cos \alpha \quad , \quad \eta = a \operatorname{sen} \alpha \quad , \quad \zeta = \varphi(\alpha) + \beta$$

con $\varphi(\alpha)$ arbitraria, e le formole di Lelieuvre daranno ora le conoidi rette del n. 3.

Nel caso poi delle superficie a curvatura positiva risulta

$$\frac{\partial^3 \sigma}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \beta^2} = 0 \quad \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right)^2 = - \mathrm{M}$$

ed ora è lecito porre

$$\sigma = \alpha , \quad \text{indi} \quad \mathrm{M} = -1 .$$

Associando alle due soluzioni delle (4)

$$\xi = a \cos \alpha \quad , \quad \eta = a \operatorname{sen} \alpha$$

una terza soluzione ζ arbitraria, le corrispondenti formole di Lelieuvre (modificate) (loc. cit., § 80) daranno per quadrature le superficie richieste.

5. Si sa che in generale le equazioni di Moutard con soluzioni quadratiche ammettono trasformazioni *ortogonali* [1], che dànno adunque nel

[1] Cfr. la mia Memoria: *Sulla varietà a tre dimensioni deformabili entro l'S₄ euclideo*, Parte prima, Memorie dei XL, tomo XIII, 1905.

caso attuale trasformazioni asintotiche delle superficie integrali della (1). Supposto che la superficie di partenza S appartenga alla terna (ξ, η, ζ) di soluzioni della (2), di cui

$$\xi = a \cos(\alpha + \beta) \quad , \quad \eta = a \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \quad , \quad \zeta \text{ arbitraria},$$

prendasi la funzione trasformatrice R definita da

$$\frac{\partial \log R}{\partial \alpha} = \cot c \quad , \quad \frac{\partial \log R}{\partial \beta} = - \operatorname{tg} c ,$$

con c costante arbitraria. La nuova superficie S_1 corrisponderà alle soluzioni trasformate

$$\xi_1 = a \cos(\alpha + \beta - 2c) \quad , \quad \eta_1 = a \operatorname{sen}(\alpha + \beta - 2c),$$

mentre la terza ζ_1 si calcolerà per quadrature dalle corrispondenti equazioni

$$\frac{\partial(\zeta_1 + \zeta)}{\partial \alpha} = \cot c(\zeta - \zeta_1) \quad , \quad \frac{\partial(\zeta_1 - \zeta)}{\partial \beta} = \operatorname{tg} c(\zeta + \zeta_1) .$$

In ζ_1 entra così, oltre c, una nuova costante arbitraria. Per la superficie S_1 trasformata abbiamo le formole (*Lezioni*, vol. II, pag. 51)

$$\begin{cases} x_1 = x + a^2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta - 2c)\zeta - a^2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta)\zeta , \\ y_1 = y - a^2 \cos(\alpha + \beta - 2c)\zeta + a^2 \cos(\alpha + \beta)\zeta , \\ z_1 = z + a^2 \operatorname{sen} 2c , \end{cases}$$

delle quali l'ultima è particolarmente da osservarsi pel suo semplice significato geometrico.

Indicheremo con B_c queste trasformazioni e noteremo che, applicate a superficie rigate della classe, dànno nuovamente rigate.

Si ha ancora qui un *teorema di permutabilità* le cui formole assumono la massima semplicità.

Se alla S sono contigue per trasformazioni B_{c_1}, B_{c_2} due superficie S_1, S_2, e si suppone $c_1^2 \neq c_2^2$, esiste una ed una sola quarta superficie S′ legata alla S_1 da una B_{c_2}, alla S_2 da una B_{c_1} e le formole corrispondenti sono

$$\xi' = \cos(\alpha + \beta - 2c_1 - 2c_2) \quad , \quad \eta' = \operatorname{sen}(\alpha + \beta - 2c_1 - 2c_2) ,$$

$$\zeta' - \zeta = \frac{\operatorname{sen}(c_1 + c_2)}{\operatorname{sen}(c_1 - c_2)}(\zeta_1 - \zeta_2) .$$

Queste trasformazioni B_c delle superficie S sono trasformazioni di Bäcklund [1], e le corrispondenti formole, nelle notazioni di Monge, si

[1] Goursat, *Équations du second ordre*, t. II, n. 202.

scrivono

$$\begin{cases} p\,(x_1 - x) + q\,(y_1 - y) - (z_1 - z) = 0 \\ p_1(x_1 - x) + q_1(y_1 - y) - (z_1 - z) = 0 \\ pp_1 + qq_1 - \cos 2c\,\sqrt{p^2 + q^2}\,\sqrt{p_1^2 + q_1^2} \\ \qquad z_1 - z - a^2 \operatorname{sen} 2c = 0\,. \end{cases}$$

Esse trasformano in sè stessa l'equazione a derivate parziali (1).

6. Per le superficie S integrali delle (3) le singole trasformazioni B_c sono necessariamente immaginarie, ma possono combinarsi in trasformazioni *reali*. Se si considera in particolare l'effetto di queste trasformazioni reali sulla equazione tipica (4), si ottengono sotto la forma seguente. Sia φ una soluzione della (4) e c una costante (reale) arbitraria, e si scriva nelle due funzioni incognite φ_1, φ_2 il sistema lineare ai differenziali totali

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} = \cosh c\,.\,\varphi_2\,, \quad \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \beta} = -\operatorname{senh} c\,.\,\varphi_1 + \cosh c\,.\,\varphi \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \cosh c\,.\,\varphi_1 + \operatorname{senh} c\,.\,\varphi\,, \quad \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial \beta} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -\operatorname{senh} c\,.\,\varphi_2\,. \end{cases}$$

Questo, essendo φ una soluzione della (4), è un sistema completamente integrabile e le due nuove funzioni φ_1, φ_2 (dipendenti da due costanti arbitrarie) sono nuove soluzioni della (4).

È da osservarsi per l'integrazione delle (9) che, applicando il metodo di d'Alembert pei sistemi lineari, la corrispondente equazione di Riccati è di immediata integrazione, e quindi: *il sistema* (9) *si integra con quadrature*. Ma inoltre, se si applica nuovamente il processo di trasformazione usando opportunamente del teorema di permutabilità, si vede che anche qui, *dal primo passo in poi, l'applicazione indefinitamente ripetuta delle trasformazioni si compie in termini finiti*.