ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Matematica. — *Sulle curve ellittiche singolari.* Nota di GAETANO SCORZA, presentata dal Corrisp. G. CASTELNUOVO.

Il compianto dott. Torelli, studiando le superficie con due fasci ellittici di curve [1], si imbattè nel seguente problema:

Quali sono sopra una curva ellittica le involuzioni birazionalmente identiche ad essa?

A questa domanda, nel lavoro citato a piè di pagina, egli dette una risposta esauriente per il solo caso delle curve ellittiche a modulo generale; ma poichè tale risposta può darsi, e in modo definitivo, per una curva ellittica qualunque, giova riprender la questione ed esaminarla in modo completo.

In quanto verremo dicendo non vi è alcuna novità sostanziale di risultati; si tratta di cose, sotto altra forma, ben conosciute. Ma come l'origine di questa Nota è puramente didattica, così anche il suo scopo non è che didattico. Essa non mira ad altro che a mettere in circolazione tra i giovani cultori della geometria i teoremi fondamentali della teoria delle funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa, indicandone in modo esplicito l'importante contenuto geometrico.

Intanto, appunto perchè lo sviluppo dei concetti qui posti di curve ellittiche singolari di *prima* o di *seconda* specie e di *determinante* di una curva ellittica singolare non esigerebbe che un facile lavoro di *traduzione* di teoremi aritmetici e analitici ben noti, io mi limiterò sul riguardo a brevissimi cenni.

1. Chiedersi se esista una involuzione di ordine ν (≥ 1) situata sopra una curva ellittica C e birazionalmente identica ad essa, o, come diremo, per brevità di discorso, se esista su C una γ_ν^1, val quanto chiedersi se sopra C possa esistere una corrispondenza (algebrica) T con gli indici $(\nu, 1)$.

Ed è pur chiaro che mentre una corrispondenza $(\nu, 1)$ T esistente su C dà luogo ad una sola γ_ν^1 situata su C, ove si considerino come gruppi di questa involuzione i gruppi di punti corrispondenti in T^{-1} ai varî punti di C, questa stessa γ_ν^1 può intendersi come collegata, nello stesso modo che a T, a tutte e sole le infinite corrispondenze $(\nu, 1)$ situate su C e provenienti dal moltiplicare T per una qualsiasi trasformazione birazionale di C in sè stessa.

[1] R. Torelli, *Sulle superficie algebriche contenenti due fasci ellittici di curve* [questi Rendiconti, 1912, serie 5ª, vol. XXI, pp. 453-457].

2. Ciò premesso, supponiamo che T sia una corrispondenza $(\nu, 1)$ [con $\nu \geq 1$] esistente sulla nostra curva ellittica C, e siano z e z' i valori dell'integrale ellittico J, legato a C, in un punto X di C e nel punto X' omologo ad X in T. Naturalmente z e z' saranno determinati a meno di periodi.

Si potrà porre, indicando con α e β costanti opportune,

$$z' = \alpha z + \beta \qquad (\alpha \neq 0),$$

e se ω ed ω' sono due periodi primitivi di J sarà

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha\omega = m\omega + n\omega' \\ \alpha\omega' = p\omega + q\omega' \end{cases}$$

con m, n, p, q interi, e

$$(2) \qquad \nu = mq - pn.$$

Se η è un numero eguale a ± 1, quando C non è nè armonica, nè equianarmonica, a ± 1, $\pm i$ $(i = \sqrt{-1})$ quando C è armonica, a ± 1, $\pm \varepsilon$ o $\pm \varepsilon^2$ $(\varepsilon = e^{2\pi i/3})$ quando C è equianarmonica, le trasformazioni birazionali di C in sè stessa sono rappresentate tutte dalle equazioni

$$z' = \eta z + c$$

al variare della costante additiva c; quindi le corrispondenze $(\nu, 1)$ *collegate* con T a una stessa involuzione γ_ν^1 situata su C sono date tutte dalle formule

$$z' = \eta\alpha z + c$$

al variare della costante additiva c.

Come è noto, il numero α, che diremo *moltiplicatore* della corrispondenza T, e gli interi m, n, p, q (*interi caratteristici* di T) si determinano reciprocamente in modo univoco; ed è pur noto che la coesistenza delle (1) tra i periodi ω e ω', il numero α e gli interi m, n, p, q rappresenta, se $\alpha \neq 0$, la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza su C di (una e quindi di) infinite corrispondenze $(\nu, 1)$ aventi il moltiplicatore α e l'indice $\nu = mq - pn \geq 1$.

Se stabiliamo di chiamare *associati* i (due, quattro o sei) numeri $\eta\alpha$, e diciamo che α è un *moltiplicatore* di C se è diverso da zero ed esistono degli interi m, n, p, q legati ad esso e ai periodi ω ed ω' dalle eguaglianze (1), possiamo dire che:

Ad ogni involuzione γ_ν^1 esistente su C risponde un gruppo di moltiplicatori associati di C e viceversa.

Segue che:

Saranno determinate tutte le γ_ν^1 esistenti su C appena sieno determinati tutti i suoi moltiplicatori.

3. Ora tale determinazione è immediata.

La curva C è non singolare o singolare secondo che l'integrale J non è od è a moltiplicazione complessa; se J è a moltiplicazione complessa, sia

$$P\omega^2 + Q\omega\omega' + R\omega'^2 = 0 \qquad (Q^2 - 4PR < 0)$$

l'equazione quadratica a coefficienti interi cui soddisfanno ω e ω', equazione che è univocamente determinata, se, come è lecito, supponiamo che P, Q, R siano primi fra di loro e che inoltre sia $P > 0$, $R > 0$.

Poichè dalle (1) si deduce per ω e ω' la relazione a coefficienti interi

$$p\omega^2 + (q - m)\,\omega\omega' - n\omega'^2 = 0\,,$$

segue che, indicando con ϱ e σ delle indeterminate intere, i sistemi di interi caratteristici m, n, p, q corrispondenti ai varî moltiplicatori α di C e questi moltiplicatori stessi sono dati tutti nel primo caso dalle formule

$$n = p = 0 \quad , \quad m = q = \varrho \quad , \quad \alpha = \varrho \qquad (\varrho \neq 0)$$

e nel secondo caso dalle formule

$$m = \sigma \qquad n = -R\varrho \quad , \quad p = P\varrho \quad , \quad q = \sigma + Q\varrho \quad , \quad \alpha = \sigma - R\frac{\omega'}{\omega}\varrho$$
$$(\varrho^2 + \sigma^2 \neq 0).$$

Corrispondentemente per $\nu = mq - pn$ si ha, nei due casi,

$$\nu = \varrho^2 \quad \text{oppure} \quad \nu = \sigma^2 + Q\varrho\sigma + PR\varrho^2\,.$$

Per dare nel secondo caso alla formula riguardante ν un aspetto più semplice giova porre, indicando con τ una nuova indeterminata intera,

$$\sigma = \tau - \frac{Q}{2}\varrho \quad \text{o} \quad \sigma = \tau - \frac{Q-1}{2}\varrho$$

secondo che Q è pari o dispari; corrispondentemente risulta

$$\nu = \tau^2 + \frac{D}{4}\varrho^2 \quad \text{oppure} \quad \nu = \tau^2 + \tau\varrho + \frac{D+1}{4}\varrho^2,$$

dove $D = 4PR - Q^2$ è positivo.

Se la curva C è singolare, il numero D che non dipende dalla scelta dei periodi primitivi di J, e che, per quanto risulterà tra poco, ha un significato geometrico fondamentale per la curva C, lo diremo il *determinante* di C; e, sempre con linguaggio evidentemente suggerito dalla teoria aritmetica delle forme quadratiche, diremo che C è della *prima* o della *seconda* *specie*, secondo che Q è pari o dispari, o, ciò che fa lo stesso, secondo che è

$$D \equiv 0 \quad \text{oppure} \quad D \equiv 3 \qquad (\text{mod. } 4).$$

Notando che se C è armonica è $D = 4$, mentre se C è equianarmonica è $D = 3$ (e viceversa), risultano dalle cose dette i seguenti teoremi:

I. *Se la curva* C *non è singolare, essa ammette infinite* γ^1_ν *con gli ordini*

$$1\ ,\ 4\ ,\ 9\ ,\ \ldots .$$

avendosi una γ^1_ν *per ogni valore dell'ordine.*

II. *Se la curva* C *è singolare e il valore del suo determinante è* D, *gli ordini delle infinite* γ^1_ν *esistenti su* C *sono dati dai numeri positivi rappresentabili mediante l'una o l'altra delle due forme*

$$f \equiv \tau^2 + \frac{D}{4}\varrho^2 \quad , \quad f' \equiv \tau^2 + \tau\varrho + \frac{D+1}{4}\varrho^2$$

secondo che C *è della prima o della seconda specie; e per ogni valore dell'ordine* ν *si hanno su* C *tante* γ^1_ν *diverse quanto è il numero delle rappresentazioni diverse di* ν *mediante la forma* f *o* f' *diviso per* 2, *per* 4 *o per* 6, *secondo che è* $D > 4$, $D = 4$ *o* $D = 3$.

Di qua si possono dedurre numerose proposizioni sfruttando la teoria dei numeri rappresentabili mediante forme quadratiche; ci basti indicare, a titolo di esempio, la seguente che dà luogo a un enunciato semplice ed elegante:

Se C *è armonica e* ν *è un numero dispari positivo, il numero delle* γ^1_ν *esistenti su* C *è dato da* $M - N$, *essendo* M *il numero dei divisori di* ν *della forma* $4h + 1$ *ed* N *il numero dei divisori di* ν *della forma* $4h + 3$.

4. Se la curva C non è singolare, le sue infinite γ^1_ν si ottengono considerando per ogni valore di n la $\gamma^1_{n^2}$ dei gruppi di punti n-pli delle ∞^1 g^{n-1}_n appartenenti a C; se la curva C è singolare, essa, oltre queste infinite $\gamma^1_{n^2}$ che si ottengono supponendo $\varrho = 0$ in tutte le formule precedenti, ne contiene infinite altre. Dette *singolari* queste ultime γ^1_ν si determina subito per esse il minimo valore che può essere assunto da ν.

Una discussione semplice e sostanzialmente nota, che qui si sopprime per ragioni di spazio, conduce infatti al teorema:

III. *Se la curva* C *è singolare ed ha il determinante* $D > 4$, *l'ordine delle sue* γ^1_ν *singolari d'ordine minimo è* $\dfrac{D}{4}$ *oppure* $\dfrac{D+1}{4}$, *secondo che* C *è della prima o della seconda specie; e il numero di queste* γ^1_ν *è, corrispondentemente,* **uno** *o* **due**.

Nel caso delle curve armoniche ed equianarmoniche le γ^1_ν *singolari* d'ordine minimo sono, rispettivamente, *una* γ^1_2 e *una* γ^1_3.

5. La classificazione delle curve ellittiche singolari in curve di 1ª e 2ª specie e l'introduzione per esse del carattere D, il valore geometrico delle quali risulta chiaramente dal teorema III, mostrano che a ricerche classiche sulla teoria dei numeri e delle funzioni ellittiche a moltiplicazione complessa può darsi un interessante significato geometrico. Il lettore lo riconosce subito appena rifletta che i teoremi seguenti non fanno altro che applicare alle curve ellittiche singolari risultati notissimi di quelle teorie.

IV. *Le curve ellittiche singolari aventi tutte uno stesso determinante, si ripartiscono in un numero finito di classi di curve birazionalmente distinte.*

V. *Gli invarianti assoluti delle curve ellittiche singolari birazionalmente distinte dello stesso determinante* (ove l'invariante assoluto di una curva ellittica, che è determinato a meno di un fattor costante, sia convenientemente definito) *sono numeri interi algebrici, radici di una stessa equazione a coefficienti interi irreducibile* (*nel campo assoluto di razionalità*).

VI. *Una curva ellittica singolare di 2ª specie a determinante* D *è birazionalmente identica a una involuzione* (*ellittica*) *di ordine* 2 *appartenente a una curva ellittica singolare di 1ª specie col determinante* 4D.

VII. *Il numero delle curve ellittiche singolari di 2ª specie col determinante* $D > 3$ *birazionalmente distinte, eguaglia quello delle curve ellittiche singolari di 1ª specie a determinante* 4D *o la sua terza parte secondo che è* $D \equiv 7 \pmod 8$ *oppure* $D \equiv 3 \pmod 8$.

Che se poi $D = 3$, *i due numeri sono ancora eguali ed eguali entrambi a* 1.

6. Ad evitar malintesi sul concetto di γ^1_ν *singolare* non è forse inutile avvertire esplicitamente che il numero delle involuzioni ellittiche di un determinato ordine esistenti sopra una curva ellittica è sempre finito ed è sempre lo stesso qualunque sia il modulo della curva. Ma *variando il modulo può cambiare il numero delle involuzioni di quell'ordine birazionalmente identiche alla curva.*