# ATTI
DELLA
# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

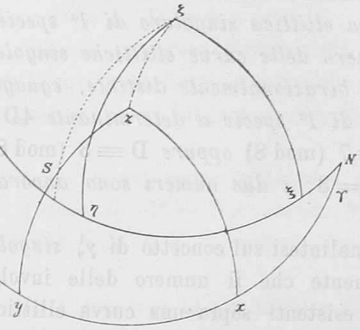
1918

**Astronomia.** — *Sopra il movimento di rotazione diurna della Terra.* Nota III di A. ANTONIAZZI (Socio corrispondente del r. Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, e della r. Accademia di Sc. L. ed A. di Padova), presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

### FORMULE DI PRECESSIONE E DI NUTAZIONE.

La risoluzione del problema riguardante il movimento diurno della Terra può considerarsi sostanzialmente raggiunta nelle due Note precedenti con il calcolo già eseguito degli integrali primi del movimento (velocità di rotazione). Converrà ora applicare quei risultati alla determinazione delle Formule di Precessione e Nutazione, limitate ai termini praticamente necessarî per gli usi astronomici.

Sia il sistema fisso $\xi\eta\zeta$ definito dall'eclittica e dall'equinozio fissi, abbia cioè l'asse $\zeta$ diretto al polo dell'eclittica fissa e l'asse $\xi$ diretto all'equinozio fisso. Il sistema mobile $xyz$ ha l'asse $z$ diretto al polo mobile




del mondo, l'asse $y$ sull'equatore mobile in una ascensione retta $\alpha$ eguale a quella dell'astro S, perciò l'asse $x$, pure situato sull'equatore mobile, avrà l'ascensione retta $\alpha - 90°$.

L'equatore mobile e l'eclittica fissa si intersecano nel punto N formando l'angolo $\varepsilon_0$ *obliquità dell'eclittica fissa sull'equatore mobile*. L'arco $\xi N = \psi$, è lo spostamento dell'equinozio sul circolo fisso di riferimento per effetto delle perturbazioni (prodotte dalla Luna e dal Sole) sul movimento diurno della Terra, cioè la *precessione lunisolare in longitudine*; l'arco $N\gamma = \sigma$ è lo spostamento dell'equinozio che dipende dal movimento della eclittica dovuto alle perturbazioni dei pianeti sul moto annuo della Terra, cioè la *precessione per i pianeti* e sarà $Nx = \sigma + \alpha - 90^\circ$. Le quantità $\psi_0$, $\varepsilon_0$, $\sigma + \alpha - 90^\circ$ sono i tre angoli euleriani che definiscono la posizione relativa dei due sistemi di coordinate (v. Tisserand, *Traité de mécanique céleste*, tome II, pag. 372) e pertanto

$$p = -\frac{d\psi_0}{dt}\operatorname{sen}\varepsilon_0\cos(\sigma+\alpha) - \frac{d\varepsilon_0}{dt}\operatorname{sen}(\sigma+\alpha)$$

$$q = \frac{d\psi_0}{dt}\operatorname{sen}\varepsilon_0\operatorname{sen}(\sigma+\alpha) - \frac{d\varepsilon_0}{dt}\cos(\sigma+\alpha)$$

da cui

$$\operatorname{sen}\varepsilon_0\frac{d\psi_0}{dt} = -p\cos(\sigma+\alpha) + q\operatorname{sen}(\sigma+\alpha)$$

$$\frac{d\varepsilon_0}{dt} = -p\operatorname{sen}(\sigma+\alpha) - q\cos(\sigma+\alpha)\,.$$

In queste si dovranno sostituire le espressioni trovate di $p$ e $q$ (formule (10) della Nota II) e ciò facendo si potrà trascurare la piccolissima precessione per i pianeti $\sigma$ in tutti i termini, ad eccezione che nel primo della espressione di $q$. Risulta

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
\operatorname{sen}\varepsilon_0\frac{d\psi_0}{dt} &= \varkappa\frac{a^3}{r^3}\operatorname{sen}2\delta\operatorname{sen}(\sigma+\alpha) - \\
&\qquad - \frac{\frac{C}{A}n + 2\mu\cos\varepsilon}{\frac{C^2}{A^2}n^2 - 4\mu^2}\,2\varkappa\mu\operatorname{sen}\varepsilon\cos 2l + \cdots \\[2ex]
\frac{d\varepsilon_0}{dt} &= -\varkappa\frac{a^3}{r^3}\operatorname{sen}2\delta\cos(\sigma+\alpha) - \\
&\qquad - \frac{\frac{C}{A}n\cos\varepsilon + 2\mu}{\frac{C^2}{A^2}n^2 - 4\mu^2}\,2\varkappa\mu\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}2l + \cdots
\end{aligned}\right.$$

Per eseguire l'integrazione dei primi termini conviene sviluppare le due funzioni $\frac{a^3}{r^3}\operatorname{sen}2\delta\operatorname{sen}(\sigma+\alpha)$, $\frac{a^3}{r^3}\operatorname{sen}2\delta\cos(\sigma+\alpha)$ in serie i cui termini siano espressi per mezzo degli elementi del moto del corpo S. Tali funzioni sono quelle stesse che entrano nei quattro integrali delle espressioni di $n_1$ e di $n_2$ (Nota II), perciò lo sviluppo dovrà essere fatto con maggiore estensione, ma con le stesse direttive del precedente e i risultati che se ne otterranno potranno anche dare l'idea dei termini allora trascurati.

In luogo delle formule (8) avremo, dalla considerazione del triangolo $\zeta z$S della figura precedente e indicando con $\lambda_0\,\beta_0$ la longitudine e la latitudine di S rispetto all'eclittica e all'equinozio fissi.

$$(12)\quad \begin{cases} \operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\beta_0\cos\varepsilon_0 + \cos\beta_0\operatorname{sen}\varepsilon_0\operatorname{sen}(\lambda_0+\psi_0) \\ \cos\delta\cos(\sigma+\alpha) = \cos\beta_0\cos(\lambda_0+\psi_0) \\ \cos\delta\operatorname{sen}(\sigma+\alpha) = -\operatorname{sen}\beta_0\operatorname{sen}\varepsilon_0 + \cos\beta_0\cos\varepsilon_0\operatorname{sen}(\lambda_0+\psi_0)\,. \end{cases}$$

Conviene ora, in luogo delle coordinate $\lambda_0\,\beta_0$ riferite all'eclittica fissa, introdurre le coordinate $\lambda\beta$ riferite alla eclittica attuale rispetto alla quale sono dati dalle effemeridi astronomiche gli elementi del moto del Sole e della Luna. La posizione dell'eclittica mobile rispetto alla fissa è data dalla longitudine $\Pi$ del suo nodo ascendente e dalla sua inclinazione $\pi$. Per semplicità porteremo sull'eclittica mobile l'equinozio fisso, intendendo cioè di contare le longitudini sull'eclittica mobile a partire da un punto distante ancora $\Pi$ dal nodo (1). Il triangolo formato dal punto S e dai poli delle due eclittiche avrà per lati $\pi$, $90^\circ-\beta$ , $90^\circ-\beta_0$ e due angoli saranno $90^\circ-(\lambda-\Pi)$ , $90^\circ+(\lambda_0-\Pi)$ e pertanto

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\beta_0 &= \operatorname{sen}\beta\cos\pi + \cos\beta\operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}(\lambda-\Pi) \\ \cos\beta_0\cos(\lambda_0-\Pi) &= \cos\beta\cos(\lambda-\Pi) \\ \cos\beta_0\operatorname{sen}(\lambda_0-\Pi) &= -\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\pi + \cos\beta\cos\pi\operatorname{sen}(\lambda-\Pi)\,. \end{aligned}$$

L'angolo $\pi$ è così piccolo da poterne trascurare le potenze superiori alla prima. Tenuto conto di ciò, sommando le due ultime equazioni moltiplicate rispettivamente per $\cos(\Pi+\psi_0)$ e per $-\operatorname{sen}(\Pi+\psi_0)$ e poi sommando le stesse equazioni moltiplicate rispettivamente per $\operatorname{sen}(\Pi+\psi_0)$ e per $\cos(\Pi+\psi_0)$ si trova

$$(13)\quad \begin{cases} \operatorname{sen}\beta_0 = \operatorname{sen}\beta + \pi\cos\beta\operatorname{sen}(\lambda-\Pi) \\ \cos\beta_0\cos(\lambda_0+\psi_0) = \cos\beta\cos(\lambda+\psi_0) + \pi\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(\Pi+\psi_0) \\ \cos\beta_0\operatorname{sen}(\lambda_0+\psi_0) = \cos\beta\operatorname{sen}(\lambda+\psi_0) - \pi\operatorname{sen}\beta\cos(\Pi+\psi_0)\,. \end{cases}$$

Le formule (9), con procedimento analogo e ponendo poi

$$1 = \cos^2\tfrac{1}{2}i + \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}i \quad , \quad \cos i = \cos^2\tfrac{1}{2}i - \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}i$$

ci daranno

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\beta &= \operatorname{sen} i\operatorname{sen}(l-\Omega) \\ \cos\beta\cos(\lambda+\psi_0) &= \cos^2\tfrac{1}{2}i\cos(l+\psi_0) + \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}i\cos(l-2\Omega-\psi_0) \\ \cos\beta\operatorname{sen}(\lambda+\psi_0) &= \cos^2\tfrac{1}{2}i\operatorname{sen}(l+\psi_0) - \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}i\operatorname{sen}(l-2\Omega-\psi_0) \\ \cos\beta\operatorname{sen}(\lambda-\Pi) &= \cos^2\tfrac{1}{2}i\operatorname{sen}(l-\Pi) - \operatorname{sen}^2\tfrac{1}{2}i\operatorname{sen}(l-2\Omega+\Pi)\,. \end{aligned}$$

(1) Si confronti J. Bauschinger, *Die Bahnbestimmung der Himmelskörper*, pag. 64.

Nel combinare queste equazioni con le (13) si osserverà che questi calcoli riguardano l'azione perturbatrice prodotta dalla Luna e che questa ha un'orbita inclinata di circa 5° sull'eclittica e pertanto si potranno ritenere trascurabili le potenze di $\operatorname{sen} i$ superiori alla seconda e il prodotto $\pi \operatorname{sen} i$ e risulterà

$$\operatorname{sen} \beta_0 = \operatorname{sen} i \operatorname{sen}(l - \Omega) + \pi \operatorname{sen}(l - \Pi)$$
$$\cos \beta_0 \cos(\lambda_0 + \psi_0) = \cos^2 \tfrac{1}{2} i \cos(l + \psi_0) + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} i \cos(l - 2\Omega - \psi_0)$$
$$\cos \beta_0 \operatorname{sen}(\lambda_0 + \psi_0) = \cos^2 \tfrac{1}{2} i \operatorname{sen}(l + \psi_0) - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} i \operatorname{sen}(l - 2\Omega - \psi_0)$$

e quindi le (12) daranno

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \delta = {} & \cos \varepsilon_0 \left[\operatorname{sen} i \operatorname{sen}(l - \Omega) + \pi \operatorname{sen}(l - \Pi)\right] \\ & + \operatorname{sen} \varepsilon_0 \left[\cos^2 \tfrac{1}{2} i \operatorname{sen}(l + \psi_0) - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} i \operatorname{sen}(l - 2\Omega - \psi_0)\right] \end{aligned}$$

$$\cos \delta \cos(\sigma + \alpha) = \cos^2 \tfrac{1}{2} i \cos(l + \psi_0) + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} i \cos(l - 2\Omega - \psi_0)$$

$$\begin{aligned} \cos \delta \operatorname{sen}(\sigma + \alpha) = {} & - \operatorname{sen} \varepsilon_0 \left[\operatorname{sen} i \operatorname{sen}(l - \Omega) + \pi \operatorname{sen}(l - \Pi)\right] \\ & + \cos \varepsilon_0 \left[\cos^2 \tfrac{1}{2} i \operatorname{sen}(l + \psi_0) - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} i \operatorname{sen}(l - 2\Omega - \psi_0)\right]. \end{aligned}$$

Da queste si deducono subito le espressioni di $\operatorname{sen} 2\delta \cos(\sigma + \alpha)$ e di $\operatorname{sen} 2\delta \operatorname{sen}(\sigma + \alpha)$. Facendo uso delle leggi del movimento ellittico si dovranno poi esprimere la longitudine vera $l$ dell'astro nella sua orbita e la distanza $r$ in funzione della longitudine media L, della longitudine del perigeo $\varpi$, dell'eccentricità e dell'orbita e della distanza media $a$. Si ha

$$l = \mathrm{L} + 2e \operatorname{sen}(\mathrm{L} - \varpi) + \frac{5}{4} e^2 \operatorname{sen} 2(\mathrm{L} - \varpi) + \cdots$$

$$\frac{a^3}{r^3} = 1 + \frac{3}{2} e^2 + 3e \cos(\mathrm{L} - \varpi) + \frac{9}{2} e^2 \cos 2(\mathrm{L} - \varpi) \cdots$$

Allora il tempo viene ad apparire esplicitamente, poichè la longitudine media dell'astro varia proporzionalmente al tempo e si può ammettere, con tutta l'approssimazione necessaria, che siano proporzionali al tempo anche le variazioni delle longitudini del nodo e del perigeo lunare e quella dell'eccenticità dell'orbita terrestre, nonchè le quantità $\pi \cos \Pi$, $\pi \operatorname{sen} \Pi$, per cui si può porre

$$\begin{aligned} \mathrm{L} + \psi_0 &= \mathrm{L}_0 + \mu t \\ \Omega + \psi_0 &= \Omega_0 + \nu t \\ \varpi + \psi_0 &= \varpi_0 + \chi t \\ e &= e_0 + e_1 t \\ \pi \cos \Pi &= \xi t \\ \pi \operatorname{sen} \Pi &= \eta t \end{aligned}$$

ritenendo $\mu\ \nu\ \chi\ e_1\ \xi\ \eta$ come costanti. Nel caso della Luna si osserverà che, mentre questa percorre la sua orbita in 27 giorni e un terzo circa, il nodo della sua orbita percorre l'intera eclittica in 18 anni e due terzi circa e perciò $\mu$ è grandissimo in confronto di $\nu$. Quando si integra una funzione di L si introduce un divisore dell'ordine di grandezza di $\mu$, mentre quando si integra una funzione di $\Omega$ si introduce un divisore dell'ordine di grandezza di $\nu$ e quindi i termini dipendenti dalla sola $\Omega$ portano il maggiore contributo alla nutazione. Avendo noi ritenuti trascurabili tutti i termini periodici che contengono il fattore $\operatorname{sen}^3 i$, dovremo ritenere trascurabili i termini periodici che contengono il fattore $e^3$ e quelli che dipendono da L e contengono il fattore $\operatorname{sen} i$, ovvero $e$, ovvero $\pi$. Nel caso del Sole, che ha il moto meno rapido di quello della Luna, si conserverà il termine dipendente da L, moltiplicato per $e$. Con queste limitazioni, eseguiti i calcoli e fatte le riduzioni, tenuto conto delle formule

$$2 \operatorname{sen} a \cos b = \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)\,,$$
$$2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \cos(a-b) - \cos(a+b)\,,$$
$$2 \cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)\,,$$

le formule (11) daranno

$$\frac{d\psi_0}{dt} = \varkappa \cos\varepsilon_0 (1 + \tfrac{3}{2} e_0^2 - 6 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} i) +$$
$$+ \varkappa \left[\frac{\cos 2\varepsilon_0}{\operatorname{sen}\varepsilon_0} (\xi \cos\psi_0 - \eta \operatorname{sen}\psi_0) + 3 e_0 e_1 \cos\varepsilon_0\right] t$$
$$- \varkappa \cos\varepsilon_0 \cos 2(\mathrm{L}_0 + \mu t) + 3\varkappa e_0 \cos\varepsilon_0 \cos(\mathrm{L}_0 - \varpi_0 + \mu t - \chi t)$$
$$+ \varkappa \frac{\cos 2\varepsilon_0}{\operatorname{sen}\varepsilon_0} \operatorname{sen} i \cos(\Omega_0 + \nu t) - 2\varkappa \cos\varepsilon_0 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} i \cos 2(\Omega_0 + \nu t) + \cdots$$

$$\frac{d\varepsilon_0}{dt} = \varkappa \cos\varepsilon_0 (\xi \operatorname{sen}\psi_0 + \eta \cos\psi_0)\, t - \varkappa \operatorname{sen}\varepsilon_0 \operatorname{sen} 2(\mathrm{L}_0 + \mu t)$$
$$+ \varkappa \operatorname{sen} i \cos\varepsilon_0 \operatorname{sen}(\Omega_0 + \nu t) + 2\varkappa \operatorname{sen}\varepsilon_0 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} i \operatorname{sen} 2(\Omega_0 + \nu t) + \cdots$$

Occorre appena rilevare che, con le limitazioni adottate, gli ultimi termini delle (11) sono trascurabili e che le variazioni ora calcolate si riferiscono all'azione di un solo astro perturbatore e quindi le formule astronomiche di precessione e nutazione si deducono dai termini qui indicati, ripetuti per ciascun astro perturbatore; per la integrazione la quantità $\varepsilon_0$ si ritiene costante nei secondi membri.

## Il movimento dell'asse istantaneo di rotazione nell'interno della massa terrestre.

Se nelle formule (v. Nota II)

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{A}} \cos \tau \qquad \frac{dn_2}{dt} = - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{A}} \operatorname{sen} \tau$$

si sostituiscono per P e $\tau$ i loro valori e, dopo eseguita l'integrazione e fatti gli sviluppi del seno e del coseno, si introducono i risultati nelle espressioni (6) di $p$ e $q$, si trova

$$p = \cos \tau \int \varkappa \frac{\mathrm{C}n}{\mathrm{A}} \frac{a^3}{r^3} \operatorname{sen} 2\delta \left[ \cos \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} nt \cos \alpha + \operatorname{sen} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} nt \operatorname{sen} \alpha \right] dt + h_1 \cos \tau$$

$$+ \operatorname{sen} \tau \int \varkappa \frac{\mathrm{C}n}{\mathrm{A}} \frac{a^3}{r^3} \operatorname{sen} 2\delta \left[ \operatorname{sen} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} nt \cos \alpha - \cos \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} nt \operatorname{sen} \alpha \right] dt - h_2 \operatorname{sen} \tau$$

$$q = \operatorname{sen} \tau \int \varkappa \frac{\mathrm{C}n}{\mathrm{A}} \frac{a^3}{r^3} \operatorname{sen} 2\delta \left[ \cos \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} nt \cos \alpha + \operatorname{sen} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} nt \operatorname{sen} \alpha \right] dt + h_1 \operatorname{sen} \tau$$

$$- \cos \tau \int \varkappa \frac{\mathrm{C}n}{\mathrm{A}} \frac{a^3}{r^3} \operatorname{sen} 2\delta \left[ \operatorname{sen} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} nt \cos \alpha - \cos \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} nt \operatorname{sen} \alpha \right] dt + h_2 \cos \tau$$

e d'altra parte si ha (formule 11)

$$\Delta \varepsilon_0 = - \int \varkappa \frac{a^3}{r^3} \operatorname{sen} 2\delta \cos(\sigma + \alpha)\, dt + \cdots$$

$$\Delta \psi_0 \operatorname{sen} \varepsilon_0 = \int \varkappa \frac{a^3}{r^3} \operatorname{sen} 2\delta \operatorname{sen}(\sigma + \alpha)\, dt + \cdots$$

Si tratta dunque sempre di integrare le due funzioni

$$\frac{a^3}{r^3} \operatorname{sen} 2\delta \operatorname{sen}(\sigma + \alpha) \quad , \quad \frac{a^3}{r^3} \operatorname{sen} 2\delta \cos(\sigma + \alpha) \, ,$$

combinate con altre funzioni periodiche. Gli sviluppi di quelle due funzioni contengono un termine costante (proveniente dalla prima), termini proporzionali al tempo (uno per ciascuna funzione) e termini periodici. Un termine costante $m$ dello sviluppo di $\frac{a^3}{r^3} \operatorname{sen} 2\delta \operatorname{sen} \alpha$ porta nella espressione di $p$ i termini seguenti

$$\cos \tau \int m \varkappa \frac{\mathrm{C}n}{\mathrm{A}} \operatorname{sen} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} nt\, dt - \operatorname{sen} \tau \int m \varkappa \frac{\mathrm{C}n}{\mathrm{A}} \cos \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}} nt\, dt = - m \varkappa \cos \alpha$$

mentre nella espressione di $q$ porta il termine

$$m \varkappa \operatorname{sen} \alpha \, .$$

Un termine $\mu t$ di primo ordine rispetto al tempo porta nella espressione di $p$ i termini seguenti

$$\cos\tau\int\mu\varkappa\frac{Cn}{A}t\,\text{sen}\frac{C}{A}nt\,dt - \text{sen}\,\tau\int\mu\varkappa\frac{Cn}{A}t\cos\frac{C}{A}nt\,dt =$$

$$= -\mu t\varkappa\cos\alpha + \frac{A}{Cn}\mu\varkappa\,\text{sen}\,\alpha$$

e nella espressione di $q$ risultano i termini

$$\mu t\varkappa\,\text{sen}\,\alpha + \frac{A}{Cn}\mu\varkappa\cos\alpha\,.$$

Un termine periodico sen $\lambda t$ porta nella espressione di $p$ i termini

$$\cos\tau\int\varkappa\frac{Cn}{A}\,\text{sen}\frac{C}{A}nt\,\text{sen}\,\lambda t\,dt - \text{sen}\,\tau\int\varkappa\frac{Cn}{A}\cos\frac{C}{A}nt\,\text{sen}\,\lambda t\,dt =$$

$$= \frac{\varkappa}{2}\frac{Cn}{A}\frac{1}{\frac{C}{A}n-\lambda}\,\text{sen}(\alpha-\lambda t) - \frac{\varkappa}{2}\frac{Cn}{A}\frac{1}{\frac{C}{A}n+\lambda}\,\text{sen}(\alpha+\lambda t)\,,$$

e nella espressione di $q$ risulteranno i termini

$$\frac{\varkappa}{2}\frac{Cn}{A}\frac{1}{\frac{C}{A}n-\lambda}\cos(\alpha-\lambda t) - \frac{\varkappa}{2}\frac{Cn}{A}\frac{1}{\frac{C}{A}n+\lambda}\cos(\alpha+\lambda t)\,.$$

Si ottengono dunque sempre termini periodici che si corrispondono nelle espressioni di $p$ e $q$ con lo scambio dei seni e dei coseni. Gli argomenti di questi termini si compongono dell'ascensione retta dell'astro e delle tre longitudini: dell'astro nella sua orbita, del nodo e del perigeo dell'orbita, e variano tutti da 0° a 360°. Si può concludere che le due quantità $p$ e $q$ oscillano ambedue intorno allo zero e che la velocità di rotazione della Terra intorno al proprio asse istantaneo di rotazione, $o = \sqrt{n^2 + p^2 + q^2}$, in media è costante e le sue oscillazioni sono così piccole da doversi sempre trascurare.

L'asse istantaneo di rotazione è determinato, rispetto agli assi coordinati, dai coseni direttori

$$\frac{p}{o} \qquad \frac{q}{o} \qquad \frac{n}{o}$$

cioè forma con il piano $xz$ l'angolo $\frac{q}{o}$, con il piano $yz$ l'angolo $\frac{p}{o}$.

Se ora si considera una coppia di termini corrispondenti delle espressioni di $p\,,q$ (termini che dipendono dal medesimo argomento) si può osservare che, mentre l'argomento varia fra 0° e 360°, l'asse istantaneo di rotazione si muove descrivendo la superficie di un cono circolare intorno all'asse di inerzia, per cui il movimento complessivo del detto asse si compone di tanti movimenti conici quante sono le coppie di termini periodici nelle espressioni di $p$ e $q$, e il polo di rotazione descrive intorno al polo d'inerzia altrettanti circoli minori, ciascuno dei quali nel tempo in cui l'argomento corrispondente varia da 0° a 360°.

Ma tutti questi movimenti sono riferiti ad assi mobili nello spazio e rispetto alla massa terrestre. Assumendo due assi $x_0\, y_0$ fissi nel piano equatoriale terrestre si può osservare che il movimento di questi rispetto ai precedenti $xy$ avviene nel senso diretto con velocità eguale alla differenza fra la velocità $n$ di rotazione della Terra intorno all'asse d'inerzia e la velocità $\frac{d\alpha}{dt}$ del movimento dell'astro intorno all'asse medesimo, per cui l'orientameuto dei nuovi assi coordinati, rispetto ai primi, può essere rappresentato dall'angolo $nt - \alpha$. Avremo perciò

$$p_0 = p \cos(nt - \alpha) + q \operatorname{sen}(nt - \alpha)$$
$$q_0 = q \cos(nt - \alpha) - p \operatorname{sen}(nt - \alpha)$$

e tutti gli argomenti dei predetti termini periodici saranno variati dell'angolo $nt - \alpha$. Poichè $n$ è molto grande in confronto delle velocità del movimento dell'astro e delle variazioni degli elementi della sua orbita, tutti quei termini si ridurranno a periodo approssimativamente diurno. Fanno eccezione i termini provenienti dalle costanti d'integrazione, i quali si trasformano negli altri termini che hanno per argomenti

$$\tau - (nt - \alpha) = \frac{C - A}{A}\, nt$$

e quindi per questi termini vale il periodo di Eulero di $\frac{A}{C - A}$ giorni siderali.

Le Variazioni di latitudini che effettivamente si osservano accusano movimenti dell'asse istantaneo di rotazione terrestre aventi periodi diversi da quelli ora accennati; per darne la spiegazione è evidentemente necessario ricorrere a ipotesi alquanto diverse da quelle che furono poste a fondamento del presente studio.

## Cristallografia. — *Sui cristalli di Quarzo di Monte Calanna (Etna).* Nota di S. Di Franco, pres. dal Corrisp. F. Millosevich.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.