ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Geometria. — *Fasci di quàdriche rotonde e Curve cartesiane.* Nota del Corrisp. GINO LORIA.

L'osservazione, pubblicata di recente (¹), che per la così detta « finestra di Viviani » passano ∞^1 quàdriche di rivoluzione (²), suggerisce naturalmente la questione *se esistano altre curve gobbe di IV e I specie, che siano basi di fasci composti di superficie reali* (cioè ad equazioni reali) *di II ordine rotonde* (³).

1. Per risolverla ricordiamo che una quàdrica di rotazione è caratterizzata dall'essere bitangente al cerchio immaginario all'infinito $\varDelta$. Ciò prova che uno dei fasci richiesto è tagliato dal piano all'infinito in un fascio di coniche $\varGamma$ tutte bitangenti a $\varDelta$. Ora, se i punti di contatto delle curve $\varGamma$ col circolo $\varDelta$ fossero variabili, il fascio delle $\varGamma$ avrebbe $\varDelta$ per inviluppo, mentre un fascio di curve piane non ammette inviluppo. In conseguenza le coniche $\varGamma$ toccano $\varDelta$ in due punti fissi e del fascio fanno parte tanto il cerchio $\varDelta$, quanto la corda di contatto (presa due volte) e le due tangenti a $\varDelta$ negli estremi di questa. Emerge da ciò che *nel caso in discorso la quartica base del fascio è l'intersezione di una sfera con una quàdrica di rivoluzione.*

(¹) G. Tiercy, *Sur la définition géométrique de la « Fenêtre de Viviani »* (L'enseignement mathématique, T. XIX, 1917, pp. 314-16).

(²) La finestra di Viviani è analiticamente definita da due equazionl della forma
$$x^2+y^2+z^2-r^2=0 \quad . \quad x^2+y^2-rx=0\,;$$
perciò essa è caso particolare di una curva assai più antica, l'ippopeda di Eudosso; infatti questa si può rappresentare col mezzo delle due seguenti equazioni (cfr. F. Gomes Teixeira, *Obras sobre mathematicas*, T. V, Coimbra 1909, pag. 324):
$$x^2+y^2+z^2-r^2=0 \quad , \quad x^2+(y-a)^2=(r-a)^2,$$
le quali coincidono con le precedenti nel caso $a=r/2$. Ora la maggior parte delle proprietà avvertite dal Tiercy nella prima, sussistono anche nella seconda. Infatti è agevole dimostrare: che per l'ippopeda passano ∞^1 quàdriche, tutte di rotazione, eccetto il cilindro parabolico $z^2-2ax+2ar=0$; che i loro centri stanno sopra l'asse delle x; e che fra essi vi ha un cono a punti immaginari $[a(\overline{x-r}^2+y^2)+rz^2=0]$, da contarsi due volte fra quelli passanti per la curva.

(³) Notisi che, siccome in un fascio di quàdriche non se ne trova in generale alcuna rotonda, così per un fascio il contenerne anche soltanto una costituisce una specializzazione; onde non ogni quartica gobba di 1ª specie sta in una quàdrica di rivoluzione. Giova anche osservare che il problema enunciato rientra in quello più generale della *ricerca dei fasci di quàdriche dotati di proprietà metriche particolari.* Oltre quelli, a cui è consacrata la presente Nota, citiamo il fascio determinato da due quàdriche equilatere, il quale è tutto costituito di superficie di tale specie.

È facile vedere che tale condizione è, non soltanto necessaria, ma anche sufficiente per ottenere un fascio costituito di quàdriche di rotazione. Infatti, rispetto ad un sistema cartesiano ortogonale, una quàdrica che sia di rivoluzione attorno all'asse delle z si può rappresentare mediante un'equazione della forma

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + \alpha z^2 + 2\beta z + \gamma = 0 ,$$

mentre l'equazione generale di una sfera è

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + p = 0 ,$$

ove i coefficienti $\alpha , \beta , \gamma , a , b , c , p$ si supporranno tutti reali, affinchè sia reale la curva d'intersezione. Perciò tutte le quàdriche del fascio così determinato si possono rappresentare con l'equazione

$$(3) \qquad \begin{aligned} (\lambda + 1)(x^2 + y^2) + (\lambda\alpha + 1) z^2 - 2ax - 2by + \\ + 2(\lambda\beta - c) z + (\lambda\gamma + p) = 0 , \end{aligned}$$

onde effettivamente sono di rotazione attorno ad assi paralleli a Oz; va soltanto escluso il caso $\lambda = -1$, chè allora la (3) diviene

$$(4) \qquad (1 - \alpha) z^2 - 2ax - 2by - 2(\beta + c) z + (p - \gamma) = 0 ,$$

la quale appartiene ad un cilindro parabolico. Dunque:

Una sfera ed una quàdrica di rotazione determinano un fascio di cui tutti gli elementi sono superficie di tale specie, eccezion fatta per un cilindro parabolico; i loro assi sono rette fra loro parallele.

2. Il discriminante $D(\lambda)$ del primo membro dell'equazione (3) è dato da

$$D(\lambda) = (\lambda + 1) \{ (\lambda + 1) [(\alpha\lambda + 1)(\gamma\lambda + p) - (\lambda\beta - c)^2] - (a^2 + b^2)(\alpha\lambda + 1) \}$$

mentre in esso il suddeterminante complementare $B(\lambda)$ del termine noto $\lambda\gamma + p$ è espresso come segue:

$$B(\lambda) = (\lambda + 1)^2 (\alpha\lambda + 1) .$$

Emerge da ciò: 1° che $D(\lambda)$ si annulla, oltre che per il valore già considerato $\lambda = -1$, per altri tre, uno dei quali certamente reale (gli altri due supporremo in seguito sempre distinti); 2° che l'equazione $B(\lambda) = 0$ ha una sola radice, oltre la radice doppia $\lambda = -1$. Dunque:

Per la quartica d'intersezione di una quàdrica di rotazione con una sfera entrambe reali, passano in generale tre coni quàdrici, uno dei quali ad equazione sempre reale ed inoltre un solo paraboloide (mentre in generale una quartica di prima specie sta su tre paraboloidi), il quale è ellittico ed a equazione reale:

$$(4) \qquad (\alpha - 1)(x^2 + y^2) - 2\alpha(ax + by) - (\beta + c\alpha) z + (p\alpha - \gamma) = 0 .$$

3. Siccome nel fascio di quàdriche che stiamo studiando si trovano sempre due coni, le cui equazioni sono reali od immaginarie coniugate, così noi potremo servircene per individuare il fascio stesso. I loro vertici sono reali od immaginarî coniugati, onde il loro punto di mezzo O è sempre reale; i loro assi saranno due rette reali o immaginarie coniugate di 1ª specie (perchè hanno reale un punto all'infinito); assumeremo O per origine di un sistema cartesiano ortogonale e per asse delle z la parallela condotta da esso alla comune direzione degli assi dei due dati coni. Siccome è sempre reale anche la congiungente dei vertici di questi, così essa determina con Oz un piano reale in cui sceglieremo l'asse delle x. In conseguenza i due coni si potranno rappresentare mediante le due equazioni:

$$(5)\qquad (x-a)^2+y^2=\frac{1}{\mu}(z-c)^2 \quad , \quad (x+a)^2+y^2=\frac{1}{\nu}(z+c)^2 .$$

Se le quantità a, c, μ, ν sono reali, i coni hanno reali i vertici e le equazioni; se di più $\mu > 0$ il primo è a punti reali e lo è il secondo quando $\nu > 0$. Se invece i due coni sono immaginarî coniugati a e c sono quantità immaginarie pure, mentre μ e ν sono numeri complessi coniugati.

Tutte le superficie del fascio sono rappresentate, al variare di λ, dall'equazione

$$(6)\qquad (\mu+\lambda\nu)(x^2+y^2)-(1+\lambda)z^2-[2a(\mu-\lambda\nu)x+2c(1-\lambda)z+ \\ +a^2(\mu+\lambda\nu)-(1+\lambda)c^2=0 ;$$

se le equazioni (5) sono a coefficienti reali, le superficie reali del fascio (6) si ottengono attribuendo al parametro λ valori reali; nel caso opposto, affinchè dalla (6) scompaia ogni traccia d'immaginario, è necessario e sufficiente che λ sia della forma $-\lambda_1/\lambda_2$, essendo λ_1 e λ_2 numeri complessi coniugati.

Il centro della superficie rappresentata dall'equazione (6) ha per coordinate

$$(7)\qquad x=a\frac{\mu-\nu\lambda}{\mu+\nu\lambda} \quad , \quad y=0 \quad , \quad z=c\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$

onde, per gli anzidetti valori del parametro, è sempre reale, sta nel piano xz ed ha ivi per luogo geometrico l'iperbole equilatera di equazione

$$(8)\qquad \left(x+\frac{\mu+\nu}{\mu-\nu}a\right)\left(z-\frac{\mu+\nu}{\mu-\nu}c\right)+\frac{4\mu\nu a c}{(\mu-\nu)^2}=0 .$$

Perciò: *Il luogo geometrico dei centri delle quadriche del fascio considerato è un'iperbole equilatera* [1], *il cui piano contiene gli assi di tutte le superficie del fascio stesso.*

[1] In generale il luogo geometrico dei centri delle quàdriche di un fascio è una

4. Consideriamo alcune superficie speciali del fascio (6).

a) Per $\lambda = -\mu/\nu$ l'or citata equazione diviene

$$(\mu - \nu)z^2 - 2a(\mu^2 - \nu^2)x + 2c(\mu + \nu)z - (\mu - \nu)c^2 = 0, \tag{9}$$

equazione sempre reale che rappresenta un cilindro parabolico.

b) Il discriminante $D(\lambda)$ del primo membro della (6) è dato da

$$D(\lambda) = 4\lambda(\mu + \nu\lambda)[(\mu + \nu\lambda)c^2 - a^2\mu\nu(1 + \lambda)]. \tag{10}$$

L'equazione $D(\lambda) = 0$, considerata come biquadratica in λ, ha per radici 0, ∞, $-\mu/\nu$, le quali corrispondono ai due coni ed al cilindro parabolico, di cui sopra; la quarta radice vale $-\dfrac{\mu(c^2 - a^2\nu)}{\nu(c^2 - a^2\mu)}$, quindi è reale se tali sono i coni dati, mentre ha la forma $-\lambda_1/\lambda_2$ se questi sono immaginarî coniugati; onde in ogni caso il terzo cono del fascio ha una equazione reale. Affinchè esso sia a punti reali è necessario e sufficiente [v. l'equazione (6)] che sia

$$\frac{\mu + \nu\lambda}{1 + \lambda} > 0;$$

ora dalla (10) risulta che per la quarta radice dell'equazione (10) si ha

$$\frac{\mu + \nu\lambda}{1 + \lambda} = \frac{a^2\mu\nu}{c^2}$$

quantità reale e positiva tanto quando a, c, μ, ν sono reali ed inoltre $\mu > 0$ e $\nu > 0$ oppure $\mu < 0$ e $\nu < 0$, quanto allorchè a, c sono quantità immaginarie pure e μ, ν sono immaginarie coniugate. Ciò dimostra che: *La curva d'intersezione di due coni di rotazione ad assi paralleli giace sopra un terzo cono a punti reali, sia quando i due coni dati sono entrambi a punti reali, sia quando entrambi sono soltanto ad equazioni reali, sia finalmente quando sono immaginarî coniugati.*

c) L'equazione (6) rappresenta una sfera quando e solo quando il parametro λ soddisfa l'equazione

$$(\mu + \nu\lambda) + (\lambda + 1) = 0.$$

Da questa si trae

$$\lambda = -\frac{\mu + 1}{\nu + 1},$$

---

cubica gobba; ma, se nel fascio si trova un cilindro, il suo asse si separa da detto luogo (e appunto ciò accade nel fascio in discorso); mentre tale distacco si verifica due volte quando la sua base è un ippopeda di Eudosso od una finestra di Viviani (v. più sopra).

valore reale se tali sono μ e ν, della forma $-\lambda_1/\lambda_2$ se μ e ν sono quantità immaginarie coniugate; in ogni caso, quindi, la sfera risultante è ad equazione reale. Questa può scriversi come segue:

$$(11) \quad \left(x - a\frac{2\mu\nu + \mu + \nu}{\mu - \nu}\right)^2 + y^2 + \left(z + c\frac{\mu + \nu + 2}{\mu - \nu}\right)^2 = \\ = \frac{4\mu\nu(\mu + 1)(\nu + 1)}{(\mu - \nu)^2} a^2 + \frac{4(\mu + 1)(\nu + 1)}{(\mu - \nu)^2} c^2 .$$

Ora l'espressione che sta al secondo membro è evidentemente positiva se a, c, μ, ν sono reali e μ, ν sono positivi; ma lo è anche quando a e c sono quantità immaginarie pure e μ, ν complesse coniugate. Emerge da ciò che: *La curva d'intersezione di due coni di rotazione ad assi paralleli si trova sopra una sfera a punti reali tanto se quei due coni sono pure a punti reali, quanto se essi sono immaginarî coniugati.*

Combinando fra loro le due ultime proposizioni si ottiene il seguente risultato: *La curva d'intersezione di due coni di rotazione ad assi paralleli può considerarsi come intersezione di una sfera e di un cono di rotazione entrambi a punti reali, tanto se i due coni sono a punti reali, quanto se essi sono immaginari coniugati.*

Nel primo di questi casi la curva è *digrammica*, nel secondo (se contiene infiniti punti reali) è *monogrammica* (1).

5. La quartica in cui si tagliano i due coni (5) si proietta ortogonalmente sul piano xy nella curva di equazione

$$\sqrt{\nu(\overline{x + a}^2 + y^2)} - \sqrt{\mu(\overline{x - a}^2 + y^2)} = 2c ;$$

è questa una curva di 4° ordine avente per cuspidi i punti ciclici del piano e per fuochi i punti dell'asse delle x le cui coordinate sono

$$a \; , \; -a \; , \; a\frac{\mu + \nu}{\mu - \nu} - \frac{2c^2}{a}\frac{1}{\mu - \nu} \quad (^2).$$

Risulta da ciò che, se i dati coni sono reali, tali sono anche questi fuochi; ma che, se sono immaginarî, è reale il solo terzo fuoco.

Nel primo caso la proiezione consta di una *coppia di ovali di Cartesio*, fatto importante, notato per la prima volta da A. Quetelet (3). Nel secondo caso

(1) L. Cremona, *Grundzüge eines allg. Theorie das Oberflächen*, deutsch von M. Curtze (Berlin, 1870), pag. 224.

(2) Per la dimostrazione di tale asserto rimando alla mia opera: *Spezielle allg. und trans. ebene Kurven*, II Aufl., I Bd. (Leipzig, 1910), pp. 179-80.

(3) Cfr. M. Chasles, *Aperçu historique*, 2e éd. (Paris, 1875), pag. 351.

invece, adottando la nomenclatura di G. Salmon [1], si ha una *curva cartesiana*. Nel primo caso la curva si può costruire per punti applicando la procedura classica che serve a determinare le proiezioni dell' intersezione di due coni di rotazione ad assi paralleli [2], oppure anche specializzando il metodo noto per delineare l' intersezione di due coni qualunque. Ma nel secondo caso tale procedura non è effettuabile con elementi reali. Siccome però, come vedemmo, la curva obbiettiva può sempre riguardarsi come intersezione di una sfera a punti reali con un cono di rotazione pure a punti reali, così le sue proiezioni si potranno ottenere mediante un altro procedimento noto, quello cioè che serve a rappresentare l' intersezione di due superficie di rotazione ad essi paralleli, dopo di avere considerata la sfera come superficie di rotazione attorno al suo diametro parallelo all'asse del dato cono. La risultante costruzione delle curve cartesiane ci sembra preferibile all' unica a noi nota relativa a tali curve [alludiamo a quella di Cayley [3], basata sull' uso di sezioni coniche]; inoltre essa mette in evidenza una sostanziale differenza topologica, non ancora avvertita, che passa fra le ovali di Cartesio e le curve cartesiane; le prime, nascendo come proiezioni ortogonali di curve digrammiche, sono costituite da coppie di rami separati; mentre una curva cartesiana, essendo proiezione ortogonale di una curva monogrammica, consta di un solo ramo. Tali conseguenze si verificano agevolmente sulle figure risultanti dall'applicazione del metodo di Monge alla delineazione dell' intersezione di una sfera con una superficie conica ad asse verticale; se vi ha *penetrazione* la proiezione orizzontale di quella linea consta di due rami, mentre se vi ha ***strappo*** essa è costituita da uno solo.

(1) *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven*, deutsch von W. Fiedler (Leipzig, 1873), pag. 311.

(2) G. Monge, *Géométrie descriptive* (Paris, An VII), pag. 75.

(3) A. Cayley, *Note on the Cartesians with two imaginary axial Foci* (Proc. of the London math. Society, T. III, 1869-71, pp. 181-82, oppure The collected Papers, T. VII, pp. 241-43).