ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Matematica. — *Sulle varietà a tre dimensioni dotate di terne principali di congruenze geodetiche.* Nota I del Socio GREGORIO RICCI.

In questa Nota ed in altra, che la seguirà da vicino, mi propongo di determinare intrinsecamente tutte le V_3, che godono della proprietà, che è chiarita nel titolo. Con questo intendimento per ognuna di tali V_3 determino le terne fondamentali corrispondenti alle terne principali di congruenze geodetiche, le quali quadrate e sommate forniscono poi una espressione canonica del suo ds^2 [1].

Come è intuitivo, per lo spazio euclideo le terne anzidette sono tutte e soltanto quelle costituite dalle rette normali ad un piano e da quelle tracciate nei piani ad esso paralleli in modo che le rette giacenti sopra uno stesso piano costituiscano un reticolato cartesiano ortogonale, il quale ruota (e in particolare può mantenersi parallelo a se stesso) nel passare da un piano all'altro. La infinità di tali terne è quindi rappresentata da una funzione arbitraria di una variabile.

Ogni altra varietà a tre dimensioni ammette una sola terna principale di congruenze geodetiche o non ne ammette alcuna. In particolare ne ammettono una le V_3 a curvatura costante positiva (alla quale corrisponde una speciale forma canonica per il loro ds^2); non ne ammettono alcuna quelle a curvatura costante negativa.

Per la proprietà caratteristica delle terne considerate sei delle rotazioni, che ad esse competono sono nulle. Vedremo che delle altre tre una sola può essere variabile e perciò ripartiremo le V_3, che formano oggetto del nostro studio in due classi, assegnando alla I^a classe quelle, per le quali una rotazione è variabile, alla II^a quelle, le cui rotazioni sono tutte costanti.

Per queste ultime sono conseguentemente costanti le tre *anormalità*, cioè quelle semplici combinazioni lineari delle rotazioni, ciascuna delle quali eguagliata a o rappresenta la condizione necessaria e sufficiente perchè una congruenza della terna sia *normale*. Vedremo che un simultaneo cambiamento di segno di tutte le anormalità non ha importanza pel problema, che ci siamo proposti e per conseguenza (prescindendo dallo spazio euclideo, che del resto trova posto nella I^a classe) le V_3 della II^a classe si possono

[1] Cfr. Ricci, *Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol XIX, ser 5^a, 2° sem., sedute del 20 febbraio e del 7 agosto 1910.

ripartire in tre sottoclassi assegnando alla 1ª quelle di cui due anormalità sono nulle e la terza è positiva; alla 2ª quelle, per le quali due anormalità sono positive e la terza è positiva o nulla; alla 3ª quelle per le quali due anormalità sono di segno opposto, mentre la terza è positiva o nulla.

Un'unica espressione canonica per il proprio ds^2 compete a tutte le varietà della Iª classe; ed altrettanto può dirsi per ciascuna delle tre sottoclassi, che costituiscono la IIª classe. Da ciò deriva la importanza della classificazione riportata sopra e la opportunità di riferirla anzichè ai valori delle anormalità delle congruenze principali, a proprietà equivalenti di quegli invarianti, che si considerano come più atti a caratterizzare intrinsecamente una V_3, voglio dire le sue curvature riemanniane principali. Se non che una maggiore semplicità di risultati consiglia di sostituire a queste le loro somme due a due, che a tenore di quanto ho proposto per le varietà in generale, dovrebbero dirsi *invarianti principali* per le V_3 (¹).

Si può allora dire che:

a) La Iª classe è costituita dallo spazio euclideo e da tutte le V_3, per le quali un invariante principale ω_1 è costante e negativo, mentre gli altri due eguali e di segno opposto variano soltanto lungo le linee della congruenza principale corrispondente ad ω_1.

b) La IIª classe è costituita da tutte le V_3, i cui invarianti principali tutti costanti sono anche tutti positivi, ovvero, uno positivo e gli altri due negativi, o in fine due nulli e il terzo diverso da 0 e di segno qualunque.

In particolare appartengono alla sottoclasse 1ª tutte le V_3, i cui invarianti principali, eguali in valore assoluto, sono due positivi ed uno negativo; alla sottoclasse 2ª le V_3, i cui invarianti principali sono tutti positivi, e quelle, per le quali uno solo di tali invarianti è positivo, mentre degli altri (che sono insieme negativi o nulli) nessuno lo supera e uno al più lo eguaglia in valore assoluto; alla 3ª le V_3, che ammettono un invariante principale negativo e due nulli e quelle, che ammettono due invarianti principali negativi, ed uno positivo in valore assoluto minore di uno almeno degli altri due.

Tutte le V_3 della IIª classe ammettono un gruppo transitivo a tre parametri almeno di movimenti rigidi; a quattro parametri se due invarianti principali sono eguali; a sei, come è ben noto, se lo sono tutti e tre. Quelle di Iª classe, escluso lo spazio euclideo, non ammettono gruppi di movimenti rigidi (²).

(¹) Cfr. Ricci. *Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque.* Atti del R. Istituto Veneto, tomo LXIII, 1904, pag. 1235.

(²) Cfr. Ricci, *Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre dimensioni.* Memorie della Società italiana delle Scienze detta dei XL, serie 3ª, tomo XII.

I metodi e i procedimenti, che applicherò in queste ricerche, sono quelli da me esposti nelle due Note sopra citate. Su di essi ritornerò brevemente e per commodità del lettore e per aggiungere alcune considerazioni, che troveranno poi applicazione. Essi, pure non giovandosi dell'algoritmo del Calcolo differenziale assoluto, si inspirano al suo concetto essenziale, secondo il quale le equazioni poste a base di ogni ricerca non sono legate alla scelta di particolari sistemi di variabili indipendenti. Questa viene invece suggerita opportunamente dai risultati dell'analisi e dall'intento di facilitarne gli ulteriori sviluppi e di rendere più semplici i risultati.

1. Si consideri la metrica di ogni V_3 come intrinsecamente definita da tre forme differenziali lineari indipendenti

$$\psi_i = \Sigma_r \lambda_{i/r}\, dx_r \quad (^1),$$

che val quanto dire da una terna fondamentale di congruenze ortogonali ψ_i di equazioni differenziali

$$\psi_{i+1} = 0 \quad , \quad \psi_{i+2} = 0 \, .$$

Per il ds^2 della varietà si ha allora la espressione

$$ds^2 = \Sigma_i \psi_i^2 \, ,$$

e ben s'intende che, data la V_3, la terna fondamentale, che la definisce, è determinata a meno di una sostituzione ortogonale.

Per la definizione di una V_3 sono equivalenti due sistemi di forme fondamentali ψ_i e (ψ_i) sempre che da ogni ψ_i si passi alla corrispondente (ψ_i) mediante una trasformazione puntuale, o in altri termini, sempre che, posto

$$(\psi_i) = \Sigma_p (\lambda_{i/p})\, dy_p \, ,$$

sia integrabile il sistema

$$(1) \qquad (\lambda_{h/p}) = \Sigma_r \lambda_{h/r} \frac{\partial x_r}{\partial y_p} \, .$$

Si ponga

$$\lambda_h^{(n)} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_{h/p}}$$

$$(A) \qquad \frac{\partial \lambda_{h/r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial \lambda_{h/r+2}}{\partial x_{r+1}} = \lambda(\sigma \lambda_h^{(r)} - \Sigma_i \varrho_{ih} \lambda_i^{(r)}) \, ,$$

essendo

$$\sigma = \Sigma_i \varrho_{ii}$$

e designandosi con λ il determinante (diverso da 0) del sistema di forme ψ_i.

(1) Qui, come in seguito, ogni indice fisso indeterminato si intenderà capace di assumere ciascuno dei valori 1, 2, 3; e così ogni sommatorio si intenderà esteso ai valori 1, 2, 3 degli indici, cui si riferisce. Mi varrò pure della convenzione, per la quale si considerano come equivalenti gli indici, che differiscono per multipli di 3.

Le ϱ_{hk} definite mediante queste posizioni costituiscono il sistema completo degli invarianti differenziali di 1° ordine del sistema di forme ψ_i talchè, designando con (ϱ_{hk}) le loro espressioni relative alle (ψ_i) le equazioni

$$(\varrho_{hk}) = \varrho_{hk},$$

se non sono identicamente soddisfatte, sono da aggiungere alle (1). Nel caso opposto (che si verifica soltanto se le ϱ_{hk} e le (ϱ_{hk}) hanno valori costanti identici), le (1) costituiscono un sistema completamente integrabile e le (ψ_i) sono quindi equivalenti alle ψ_i.

Concludiamo che:

« Una terna fondamentale ortogonale e quindi la corrispondente V_3, « per la quale gli invarianti differenziali di 1° ordine, devono assumere « valori costanti dati, se esiste, risulta da questi valori completamente de- « terminata ».

Si consideri il triedro T avente per spigoli le tangenti positive alle linee delle congruenze fondamentali uscenti da uno stesso punto P e come senso positivo delle rotazioni intorno alla tangente (h) alla linea della congruenza ψ_h si assuma quello, che va dalla tangente $(h+1)$ verso la tangente $(h+2)$. L'invariante ϱ_{hk} rappresenta la componente secondo (h) della rotazione, che il triedro T subisce per uno spostamento infinitesimo del suo vertice nella direzione (k) [1].

Ricordiamo ancora che gli invarianti $\varrho_{h+1\,h+2}$ e $-\varrho_{h+2\,h+1}$ misurano le proiezioni sulla tangente (h) delle curvature geodetiche delle linee appartenenti alle congruenze ψ_{h+2} e ψ_{h+1} e che (scrivendo ϱ_h in vece di ϱ_{hh}), l'invariante

$$\alpha_h = \varrho_{h+1} + \varrho_{h+2} \tag{2}$$

si chiama, per la ragione già riferita, anormalità della congruenza ψ_h.

Designamo con ds_h l'elemento lineare delle linee di questa congruenza, con P_{hk} il complemento algebrico dell'elemento ϱ_{hk} nel determinante $\|\varrho_{ij}\|$ e poniamo

$$\omega_{hk} = -\frac{\partial \varrho_{hk+1}}{\partial s_{k+2}} - \frac{\partial \varrho_{hk+2}}{\partial s_{k+1}} + \sigma \varrho_{hk} - P_{hk} - \Sigma_i \varrho_{hi} \varrho_{ki}. \tag{3}$$

Una prima derivazione delle equazioni (A) e la successiva eliminazione delle derivate seconde delle $\lambda_{h/r}$, tenuto conto delle (A) conduce alle equazioni

$$\omega_{kh} = \omega_{hk}, \tag{B}$$

le quali, se sono identicamente soddisfatte, ci assicurano della completa

[1] Cfr. Ricci, *Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque.* Memorie della Reale Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. II, pag. 4.

integrabilità del sistema (A), nel quale si considerino come date le ϱ_{hk} e come incognite le $\lambda_{h/r}$, mentre nel caso opposto sono da aggiungere al sistema medesimo.

L'essere poi, in luogo delle (B), soddisfatte le

$$(B_1) \qquad \omega_{hk} = 0 \qquad (k \neq h)$$

è condizione necessaria e sufficiente perchè le congruenze ψ_h costituiscano nella varietà da esse definita una terna principale; di cui le ω_{hh} sono allora le curvature principali riemanniane.

2. Per quanto abbiamo sopra ricordato, l'annullarsi degli invarianti $\varrho_{h+1\,h+2}$ e $\varrho_{h+2\,h+1}$ è condizione necessaria e sufficiente perchè le congruenze ψ_h siano geodetiche. Tenuto conto di ciò e delle (2) se si esige che le congruenze fondamentali siano geodetiche, le equazioni (A) assumono la forma

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial \lambda_{h/r+1}}{\partial x_{r+2}} - \frac{\partial \lambda_{h/r+2}}{\partial x_{r+1}} = \alpha_h (\lambda_{h+1/r+1}\, \lambda_{h+2/r+2} - \lambda_{h+1/r+2}\, \lambda_{h+2/r+1})$$

alle quali sono da aggiungere le (B_1) cioè, nel nostro caso, le

$$(\beta) \qquad \frac{\partial \varrho_h}{\partial s_{h+1}} = \frac{\partial \varrho_h}{\partial s_{h+2}} = 0\,,$$

se si esige che le congruenze ψ_h siano principali.

Nelle stesse ipotesi le (3) ci dànno per le curvature principali riemanniane ω_{hh} e per gli invarianti principali

$$\omega_h = \omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2}$$

le espressioni

$$(4) \qquad \begin{cases} \omega_{hh} = \alpha_h\, \varrho_h - \varrho_{h+1}\, \varrho_{h+2} \\ \omega_h = 2\, \varrho_{h+1}\, \varrho_{h+2}\,. \end{cases}$$

E poichè dalle (2) seguono le

$$2\, \varrho_h = \alpha_{h+1} + \alpha_{h+2} - \alpha_h$$

alle (4) si potranno sostituire le

$$(4_1) \qquad \begin{cases} 2\, \omega_h = \alpha_h^2 - (\alpha_{h+2} - \alpha_{h+1})^2 \\ \omega_{hh} = \dfrac{1}{4} (\Sigma_i\, \alpha_i)^2 - \alpha_h^2 - \alpha_{h+1}\, \alpha_{h+2}\,. \end{cases}$$

Osserviamo che, come segue dalle equazioni (α), un cambiamento di segno comune a tutte le α_h (o a tutte le ϱ_h) importa soltanto cambiamento nel senso positivo delle linee delle congruenze principali.

Quanto alle equazioni (β), poichè, indicando con μ_h dei coefficienti indeterminati, esse equivalgono alle

$$(\beta') \qquad \frac{\partial \varrho_h}{\partial x_r} = \mu_h \lambda_{h/r} ,$$

esse ci dicono che ogni congruenza ψ_h, per la quale la corrispondente ϱ_h sia variabile, è normale.

Ne segue che una al più delle ϱ_h può essere variabile poichè dalla variabilità, per esempio, di ϱ_1 si conclude che è $\alpha_1 = 0$, cioè

$$(5) \qquad \varrho_2 = -\varrho_3 = c ,$$

con c costante, chè diversamente le $\lambda_{2/r}$ e le $\lambda_{3/r}$ risulterebbero proporzionali e quindi $\lambda = 0$; e che, se una ϱ_h è variabile, essa varia soltanto lungo le linee della corrispondente congruenza ψ_h.

Dalle (4) e (5) ricaviamo poi che

$$(6) \qquad \omega_1 = -2c^2 \quad , \quad \omega_3 = -\omega_2 = 2c\varrho_1$$

sono le espressioni degli invarianti principali della V_3 di questa classe, la quale (per $c = 0$) comprende, come caso particolare, lo spazio euclideo.

Se si osserva di più che, se si suppongono costanti tutte le ϱ_h, tali per le (4) risultano pure tutte le ω_h si conclude che:

Le varietà a tre dimensioni dotate di terne principali di congruenze geodetiche si ripartiscono nelle seguenti due classi:

I^a che comprende lo spazio euclideo e le V_3, per le quali un invariante principale è costante e negativo; mentre gli altri due eguali e di segno opposto variano soltanto lungo le linee della congruenza principale corrispondente all'invariante costante;

II^a costituita da varietà, i cui invarianti principali sono tutti costanti.

4. Ci occuperemo, per ora, soltanto delle varietà della I^a classe, che ci proponiamo di determinare intrinsecamente.

Come risulta dalle (α), se una congruenza ψ_h è normale, la corrispondente forma lineare ψ_h è il differenziale esatto di una funzione, che è naturale assumere come variabile indipendente. Nel caso nostro, essendo $\alpha_1 = 0$, e quindi la congruenza ψ_1 normale assumeremo

$$\psi_1 = dx_1$$

cioè

$$\lambda_{1/1} = 1 \quad , \quad \lambda_{1/2} = 0 \quad , \quad \lambda_{1/3} = 0 .$$

Sarà poi ϱ_1 funzione della sola x_1 e (le equazioni (β) e le (α) per $h = 1$ risultando identicamente soddisfatte) rimarranno da determinare ψ_2 e ψ_3 in modo che siano soddisfatte le equazioni (α) per $h = 2$ ed $h = 3$, nelle quali sia posto

$$\alpha_1 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = \varrho_1 - c \quad , \quad \alpha_3 = \varrho_1 + c ;$$

cioè le equazioni

$$\frac{\partial \lambda_{2/2}}{\partial x_3} - \frac{\partial \lambda_{2/3}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \lambda_{2/3}}{\partial x_1} - \frac{\partial \lambda_{2/1}}{\partial x_3} = (\varrho_1 - c)\, \lambda_{3/3}$$

$$\frac{\partial \lambda_{2/1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{2/2}}{\partial x_1} = -(\varrho_1 - c)\, \lambda_{3/2}$$

$$\frac{\partial \lambda_{3/2}}{\partial x_3} - \frac{\partial \lambda_{3/3}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \lambda_{3/3}}{\partial x_1} - \frac{\partial \lambda_{3/1}}{\partial x_3} = -(\varrho_1 + c)\, \lambda_{2/3}$$

$$\frac{\partial \lambda_{3/1}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{3/2}}{\partial x_1} = (\varrho_1 + c)\, \lambda_{2/2}\,.$$

Di queste la 1ª e la 4ª dànno

$$\lambda_{2/2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\,,\ \lambda_{2/3} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\ ;\ \lambda_{3/2} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\,,\ \lambda_{3/3} = \frac{\partial \psi}{\partial x_3}\,,$$

con φ e ψ designando delle funzioni arbitrarie di x_1, x_2, x_3 indipendenti rispetto ad x_2 ed x_3, come segue dal dovere essere diverso da 0 il determinante λ, che per le (5) coincide collo jacobiano delle funzioni φ e ψ rispetto ad x_2 ed x_3. Possiamo dunque assumere $x_2 = \varphi$, $x_3 = \psi$ dopo di che rimangono da soddisfare le equazioni

$$\frac{\partial \lambda_{2/1}}{\partial x_2} = 0\,,\ \frac{\partial \lambda_{2/1}}{\partial x_3} = -(\varrho_1 - c)\ ;\ \frac{\partial \lambda_{3/1}}{\partial x_2} = \varrho_1 + c\,,\ \frac{\partial \lambda_{3/1}}{\partial x_3} = 0\,,$$

le quali integrate dànno

$$\lambda_{1/1} = -(\varrho_1 - c)\, x_3 + \mu_1\ ,\ \lambda_{3/1} = (\varrho_1 + c)\, x_2 + \nu_1\,,$$

μ_1 e ν_1 essendo simboli di funzioni arbitrarie di x_1, le quali però possono assumersi eguali a 0 sostituendo ad x_2 ed x_3 come nuove variabili

$$x_2 + \int \mu_1\, dx_1\ ,\ x_3 + \int \nu_1\, dx_1\,.$$

Riassumendo abbiamo per le forme fondamentali ψ_1, ψ_2, ψ_3 e per il ds^2 delle varietà della Iª classe le seguenti espressioni:

$$\psi_1 = dx_1\,,\ \psi_2 = dx_2 - (\varrho_1 - c)\, x_3\, dx_1\,,\ \psi_3 = dx_3 + (\varrho_1 + c)\, x_2\, dx_1$$

$$(\alpha) \qquad ds^2 = \{1 + (\varrho_1 + c)^2 x_2^2 + (\varrho_1 - c)^2 x_3^2\}\, dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$$
$$+ 2(c - \varrho_1)\, x_3\, dx_1\, dx_2 + 2(c + \varrho_1)\, x_2\, dx_1\, dx_3\,.$$

Per esse le espressioni degli invarianti principali son dati dalle (6) e quelle delle curvature principali riemanniane dalle

$$\omega_{11} = c^2 \quad , \quad \omega_{22} = -c^2 + 2c\varrho_1 \quad , \quad \omega_{33} = -c^2 - 2c\varrho .$$

Dunque di queste una è costante, positiva ed eguale in valore assoluto e di segno opposto alla media aritmetica delle altre due.

Per $c = 0$ si ha, come osservammo, lo spazio euclideo, nel quale la congruenza ψ_1 risulta normale, mentre le congruenze ψ_2 e ψ_3 hanno anormalità eguali, il cui valore è dato da ϱ_1.

Se poi si ricorda il significato cinematico delle ϱ_{hk} si riconosce che l'essere tra queste diversa da 0 la sola ϱ_1 importa che il triedro formato dalle tangenti alle linee delle congruenze principali uscenti da uno stesso punto subisca una semplice traslazione per uno spostamento infinitesimo del suo vertice secondo l'una o l'altra delle linee ψ_2 e ψ_3; mentre, se lo spostamento ha luogo lungo la linea ψ_1, esso ruota semplicemente intorno alla tangente a questa linea. Segue da tutto ciò e dall'essere ϱ_1 funzione soltanto di x_1, che le rette ψ_1 sono normali ad un sistema di piani paralleli Π, mentre le rette ψ_2 (e conseguentemente le ψ_3) parallele fra di loro in uno stesso piano Π ruotano di uno stesso angolo nel passare dall'uno all'altro di questi piani.

Ciò risulta anche dal fatto che per passare dalla espressione del ds^2 dello spazio euclideo, che si trae da quella riferita sopra ponendo $c = 0$, alla espressione canonica $dx^2 + dy^2 + dz^2$ basta porre

$$x = x_1 \ , \ y = \cos\theta\, x_2 + \sin\theta\, x_3 \ , \ z = \sin\theta\, x_3 - \cos\theta\, x_3 ,$$

essendo

$$\vartheta = -\int \varrho_1\, dx_1 .$$

Per lo stesso cambiamento di coordinate la espressione del ds^2 delle varietà di I^a classe assume invece, per c qualunque, la forma

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + c^2(y^2 + z^2)\, dx^2$$
$$+ 2c\, dx \{(y \sin 2\theta + z \cos 2\theta)\, dy + (y \cos 2\theta - z \sin 2\theta)\, dz\} .$$