ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

done l'attività contrattile, e non sulla innervazione vagale. Non è nemmen da pensare che essa paralizzi la innervazione simpatica dell' intestino, perchè in un preparato intestinale contratturato da una dose eccessiva di secreto, qualche goccia di estratto acquoso o di soluzione in liquido di Ringer di residuo di estratto alcoolico delle ghiandole basta a provocare una forte e duratura depressione del tono.

Matematica. — *Nuovi criterî per l'isometria di due superficie o varietà.* Nota di E. Bompiani, presentata dal Socio G. Castelnuovo.

1. La rappresentabilità geodetica di due superficie equivale *in generale* al prodotto di una applicabilità per una similitudine; sfuggono però a questa proprietà le superficie di Liouville di elementi lineari

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2) \;,\; d\bar{s}^2 = -(1/U + 1/V)(du^2/U - dv^2/V)$$

sulle quali si corrispondono le geodetiche pur non essendo applicabili.

Una proprietà caratteristica dell'applicabilità si trova invece ricercando *quali sono le trasformazioni puntuali di una superficie che conservano la curvatura geodetica di tutte le sue curve* (non solo delle geodetiche).

Definito sulla superficie data un sistema di curve con l'equazione differenziale $M du + N dv = 0$, la curvatura geodetica di queste linee è

$$\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\frac{FN - GM}{\sqrt{EN^2 - 2FMN - GM^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{FM - EN}{\sqrt{EN^2 - 2FMN - GM^3)}}\right)\right\}$$

(E, F, G sono i coefficienti del $ds^2 = E du^2 + 2F\, du\, dv + G dv^2$).

Questa espressione deve essere uguale all'analoga che si ottiene cambiando E, F, G in $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ (relativa alla superficie trasformata, riferiti punti corrispondenti agli stessi parametri), *qualunque siano* M, N *e le loro derivate.*

Essa è lineare intera nelle derivate di M, N; il coefficiente di $\frac{\partial M}{\partial v} MN$ è uguale a quello di $\frac{\partial N}{\partial u} MN$ e vale

$$\frac{\sqrt{EG - F^2}}{(EN^2 - 2FMN - GM^2)^{3/2}} .$$

È invariante quindi l'espressione

$$\frac{EN^2 - 2FMN - GM^2}{(EG - F^2)^{1/3}}$$

la quale, essendo razionale intera in M, N, porta seco l'invarianza dei coefficienti di N^2, M^2, MN; quindi

$$\frac{\overline{E}}{E} = \frac{\overline{F}}{F} = \frac{\overline{G}}{G} = \sigma$$

e dev'essere $\sigma = 1$ perchè l'invariante è omogeneo di grado 1/3 nelle E, F, G.

La trasformazione è un'applicabilità.

La stessa conclusione vale se per ogni valore di M/N vi è più di un sistema di valori delle derivate di M ed N che soddisfi alla condizione d'invarianza.

Se una trasformazione puntuale di una superficie conserva la curvatura geodetica di un doppio sistema ∞^2 *di curve* (*cioè tale che vi siano due curve del sistema cui appartenga una tangente alla superficie*) *la trasformazione è necessariamente un'applicabilità.*

2. Questo teorema esclude che due superficie di Liouville, in corrispondenza geodetica, posseggano un altro sistema ∞^2, oltre quello delle geodetiche, di curve a curvatura geodetica invariante. Ma non è escluso che esistano sistemi ∞^1 di tali curve. Se si cercano le curve a curvatura geodetica invariante per i due ds^2 scritti in principio del n. 1 si trova, tenendo conto dell'invarianza dell'equazione delle geodetiche, che esse sono definite dalla equazione differenziale

$$\frac{U-1}{U}\, du^2 = \frac{V+1}{V}\, dv^2,$$

quindi in termini finiti

$$\int \sqrt{\frac{U-1}{U}}\, du = \pm \int \sqrt{\frac{V+1}{V}}\, dv + \text{cost.}$$

Ogni rappresentazione geodetica fra superficie di Liouville lascia invariato, oltre il sistema ∞^2 *delle geodetiche, un doppio sistema* ∞^1 *di curve insieme con la curvatura geodetica.* Queste curve sono simmetriche rispetto al doppio sistema isotermo che serve di base alla rappresentazione.

Questo doppio sistema non è in generale costituito da geodetiche; infatti, imponendo che lo sia, si trova un'equazione differenziale in U e V che non è identicamente soddisfatta.

3. S'intende che se una trasformazione puntuale lascia inalterata la curvatura geodetica delle curve di una V_k, è necessariamente un'applicabilità [1].

Un'altra proprietà, più interessante, che può definire le applicabilità di una V_k ($k > 2$) si ottiene considerando in luogo della *totalità delle curve*

[1] Della rappresentazione geodetica fra varietà mi occuperò in un altro lavoro.

(e l'invarianza del loro elemento lineare) la *totalità delle superficie* contenute in V_k e prendendo come carattere invariante nella trasformazione la loro curvatura gaussiana [1].

Il problema che ci poniamo è quindi il seguente:

Deformare una varietà in modo che si conservi la curvatura gaussiana in ogni punto di una qualsiasi superficie immersa in essa.

Si tratti di una varietà a tre dimensioni, V_3; nel caso di una varietà a più dimensioni basta pensare alle V_3 immerse in essa per convalidare il risultato.

Le coordinate cartesiane ortogonali di un punto generico della varietà siano $x_i(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, $i = 1, \ldots, n$; se le variabili τ sono, come debbono essere, essenziali, in un punto generico della varietà è

$$A^2 = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_1} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_2} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_3} \end{Vmatrix}^2 \neq 0 .$$

Se il quadrato dell'elemento lineare della varietà è dato da

$$ds^2 = \sum_{r,s}^{1,2,3} a_{rs}\, d\tau_r\, d\tau_s ,$$

per la isometria [2] di due varietà è necessario e basta che siano uguali le a_{rs} in punti corrispondenti.

Una superficie entro la varietà sarà assegnata dando le τ in funzione di due nuovi parametri u, v; la curvatura gaussiana della superficie descritta dal punto $x_i(u, v)$ è data da

$$\left\{ \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} \end{Vmatrix} - \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial u \, \partial v} \end{Vmatrix}^2 \right\} : \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial v} \end{Vmatrix}^4 .$$

[1] Se si assume come carattere invariante nella trasformazione della V_k l'elemento d'area delle sue superficie si perviene pure subito all'isometria.

[2] Diremo che due varietà sono isometriche quando hanno uguali i quadrati degli elementi lineari corrispondenti: com'è ben noto può essere, in relazione alla dimensione dell'ambiente, che non esistano altre varietà isometriche ad una data all'infuori di quelle uguali (per movimenti).

Dobbiamo ora sostituire alle derivate delle x_i rispetto ad u, v quelle eseguite rispetto alle τ. Scegliendo come si può $\tau_1 = u$, $\tau_2 = v$, $\tau_3 = \tau_3(\tau_1, \tau_2)$ si ha:

$$(1)\quad \left\{ \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_i}{\partial \tau_1} + \frac{\partial x_i}{\partial \tau_3}\frac{\partial \tau_3}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial x_i}{\partial \tau_2} + \frac{\partial x_i}{\partial \tau_3}\cdot\frac{\partial \tau_3}{\partial \tau_2} \\ E_i^{20} + \frac{\partial x_i}{\partial \tau_3}\frac{\partial^2 \tau_3}{\partial \tau_1^2} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_i}{\partial \tau_1} + \frac{\partial x_i}{\partial \tau_3}\frac{\partial \tau_3}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial x_i}{\partial \tau_2} + \frac{\partial x_i}{\partial \tau_3}\frac{\partial \tau_3}{\partial \tau_2} \\ E_i^{02} + \frac{\partial x_i}{\partial \tau_3}\frac{\partial^2 \tau_3}{\partial \tau_2^2} \end{matrix} \right\| - \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_i}{\partial \tau_1} + \frac{\partial x_i}{\partial \tau_3}\frac{\partial \tau_3}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial x_i}{\partial \tau_2} + \frac{\partial x_i}{\partial \tau_3}\frac{\partial \tau_3}{\partial \tau_2} \\ E_i^{11} + \frac{\partial x_i}{\partial \tau_3}\frac{\partial^2 x_i}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \end{matrix} \right\|^2 \right\} :$$

$$: \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_i}{\partial \tau_1} + \frac{\partial x_i}{\partial \tau_3}\frac{\partial \tau_3}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial x_i}{\partial \tau_2} + \frac{\partial x_i}{\partial \tau_3}\frac{\partial \tau_3}{\partial \tau_2} \end{matrix} \right\|^4$$

ove E_i^{20}, E_i^{02}, E_i^{11} indicano termini che non contengono derivate seconde di τ_3. Questa espressione è quadratica nelle derivate seconde di τ_3 che contiene nel termine $\frac{\partial^2 \tau_3}{\partial \tau_1^2}\frac{\partial^2 \tau_3}{\partial \tau_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \tau_3}{\partial \tau_1 \partial \tau_2}\right)^2$ col coefficiente

$$A^2 : \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_i}{\partial \tau_1} + \frac{\partial x_i}{\partial \tau_3}\frac{\partial \tau_3}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial x_i}{\partial \tau_2} + \frac{\partial x_i}{\partial \tau_3}\frac{\partial \tau_3}{\partial \tau_2} \end{matrix} \right\|^4$$

il quale quindi deve essere invariante nella deformazione indipendentemente dai valori, affatto arbitrarî, da darsi a $\frac{\partial \tau_3}{\partial \tau_1}$ e $\frac{\partial \tau_3}{\partial \tau_2}$. In luogo di esso si può considerare l'altro

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_i}{\partial \tau_1} + \frac{\partial x_i}{\partial \tau_3}\frac{\partial \tau_3}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial x_i}{\partial \tau_2} + \frac{\partial x_i}{\partial \tau_3}\frac{\partial \tau_3}{\partial \tau_2} \end{matrix} \right\|^2 : A\,;$$

poichè A non contiene le derivate di τ_3, l'invarianza dell'ultima espressione si risolve in quella di più altre che si ottengono sviluppando il numeratore; si dimostra così che sono invarianti i complementi algebrici delle a_{rs} nel determinante

$$A^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

divisi per A. Se con questi invarianti formiamo un nuovo determinante, esso vale, in virtù di un teorema noto, A, il quale è dunque invariante.

Tali sono anche i complementi algebrici delle a_{rs} in A^2: e di conseguenza le a_{rs} stesse.

Si abbiano due varietà a $k \geq 3$ dimensioni poste in corrispondenza tale che due superficie corrispondenti qualsiansi abbiano in punti corrispondenti la stessa curvatura gaussiana: le varietà si corrispondono necessariamente in un'isometria.

È inutile esaminare le altre condizioni che si ricaverebbero dall'invarianza della curvatura di una superficie generica della V_k perchè la condizione trovata è certo sufficiente; del resto si verifica facilmente che le espressioni invarianti rimanenti si costruiscono con le a_{rs} e con i simboli di Christoffel e con le loro derivate.

Si può invece utilmente osservare che la condizione imposta a *tutte* le superficie della varietà è esuberante.

Infatti, prese due varietà poste in corrispondenza puntuale qualsiasi, l'uguaglianza delle espressioni della curvatura K fornite dalla (1) per le due varietà corrispondenti si traduce in un'equazione a derivate parziali di 2° ordine e di 2° grado; quindi, se per ogni sistema di valori τ_1, τ_2, τ_3, $\frac{\partial\tau_3}{\partial\tau_1}$, $\frac{\partial\tau_3}{\partial\tau_2}$, $\frac{\partial^2\tau_3}{\partial\tau_1^2}$, $\frac{\partial^2\tau_3}{\partial\tau_2^2}$ si ottengono 3 valori di $\frac{\partial^2\tau_3}{\partial\tau_1\,\partial\tau_2}$. l'equazione è identica e si può ripetere il ragionamento già fatto.

Per enunciare il risultato in forma geometrica, consideriamo l'elemento di 2° ordine σ_2 di una superficie adiacente ad un suo punto (definito da τ_1, τ_2, τ_3 e dalle derivate prime e seconde di τ_3): esso ha la curvatura gaussiana di ogni superficie che lo contenga. Fissando τ_1, τ_2, τ_3 e le derivate ora dette ad eccezione di $\frac{\partial^3\tau_3}{\partial\tau_1\,\partial\tau_2}$, si ha un *fascio* di elementi σ_2, tutti fra loro tangenti nel punto e osculatori a due linee uscenti da esso (cioè contenenti gli elementi di 2° ordine di queste linee uscenti dal punto). Allora:

Se una trasformazione puntuale fra due V_3 è tale che in ogni fascio di elementi σ_2 corrispondenti ve ne siano t r e con la stessa curvatura gaussiana, le due V_3 sono isometriche.

Lo stesso enunciato vale per una V_k, quando si sia definito in modo analogo il fascio di elementi superficiali.

Ad un altro criterio per l'isometria si arriva prefissando un valore di K (arbitrario anche costante purchè $\neq 0$) e imponendo che sulle due varietà si corrispondano gli elementi superficiali che hanno quella curvatura.

La condizione che sulle due varietà si corrispondano gli elementi superficiali di 2° ordine a curvatura nulla esige un esame differente che sarà fatto in un'altra Nota.