ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Meccanica. — *Euclideità dello spazio completamente vuoto nella relatività generale di Einstein.* Nota di R. SERINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA,

Nella relatività generale di Einstein il ds^2 (che congloba le misure di spazio e tempo) corrispondente a fenomeni statici, è della forma ([1])

$$(1)\qquad ds^2 = V^2\,dt^2 - dl^2\,,$$

dove

$$(2)\qquad dl^2 = \sum_{1\,ik}^{3} a_{ik}\,dx_i\,dx_k \qquad (i\,,k = 1\,,2\,.\,3)$$

è il quadrato dell'elemento lineare dello spazio. La V (velocità della luce) e le a_{ik} sono funzioni delle x_i, indipendenti dal tempo.

Queste sette quantità sono determinate da altrettante equazioni che le legano al tensore gravitazionale. Se questo si suppone nullo in tutto lo spazio, cioè si tratta dello spazio completamente vuoto, le dette equazioni si riducono alle

$$(\mathrm{I})\qquad \mathfrak{M} = \sum_{1\,ik}^{3} \alpha_{ik}\,a^{(ik)} = 0 \qquad (i\,,k = 1\,,2\,,3)$$

$$(\mathrm{II})\qquad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} = 0\,, \qquad \text{id.}$$

dove $\mathfrak{M}$ è la curvatura media dello spazio (2), α_{ik}, V_{ik} rispettivamente i noti simboli del Ricci e le derivate seconde covarianti della V [sempre per la forma (2)].

Moltiplicando ordinatamente la (II) per $a^{(ik)}$ e sommando rispetto ad $i\,,k$, col tener conto della (I), si ottiene la nuova equazione sostituibile alla (I):

$$(\mathrm{I}')\qquad \Delta_2\,V = 0\,.$$

([1]) Per tutta la teoria e per le notazioni, vedi i lavori seguenti del Levi-Civita: 1) *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein.* Rend. Lincei, 1° aprile 1917. — 2) *Statica einsteiniana.* Rend. Lincei, 6 maggio 1917. — 3) *Realtà fisica di alcuni spazi normali del Bianchi.* Rend. Lincei, 20 maggio 1917. — 4) *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani.* I: *Generalità e prima approssimazione.* Rend. Lincei, 16 dicembre 1917. II: *Condizioni di integrabilità e comportamento geometrico spaziale.* Rend. Lincei, 6 gennaio 1918.

Il sistema (I), (II) oppure l'equivalente (I'), (II), deve essere soddisfatto in tutto lo spazio. *Si tratta di dimostrare che lo spazio* (2) *è allora necessariamente euclideo.* La necessità di questa dimostrazione è posta in evidenza dal Levi-Civita (4°, I, § 3 in nota) di cui riporto le parole:

« L'affermazione è intuitiva sotto l'aspetto fisico, rispecchiando, si può dire, il punto di partenza della costruzione speculativa di Einstein. Dal punto di vista matematico si richiederebbe invece una dimostrazione rigorosa in base alle equazioni che racchiudono ormai tutta la teoria ».

Credo d'esser riuscito a dimostrare l'asserzione in due modi, considerando rispettivamente i due sistemi di equazioni di cui è detto sopra.

§ 1. Prima dimostrazione. — La funzione V (velocità della luce), deve essere regolare (colle sue derivate fino al secondo ordine) e soddisfare alla (I'), in tutto lo spazio. Consideriamo allora il luogo dei punti

$$V(x_1, x_2, x_3) = \gamma \text{ (costante)}. \tag{3}$$

Esso potrà essere costituito di punti, linee, superfici (isolati) od anche volumi che chiamerò (per una evidente analogia), *punti, linee ecc. di livello.*

Siccome la V è sempre finita, la costante γ avrà un minimo λ ed un massimo μ.

Uno di questi valori potrà essere preso dalla V nei punti all'∞ dello spazio, ma allora l'altro è preso in punti al finito. Supponiamo sia μ: siccome poi $V - \mu$ si trova nelle stesse condizioni di V, potremo sempre supporre il massimo uguale a zero. Allora il luogo dei punti

$$V = 0 \tag{4}$$

sarà costituito da punti, linee, superfici (isolati), o volumi di massimo.

Con ciò si intenderà, prendendo p. es. un punto P (isolato) di massimo, che esista un intorno di P in cui $V < 0$. Così potrà esservi un volume S in cui $V = 0$, mentre nei punti esterni ad esso $V < 0$. Dimostrerò che ciò è impossibile.

Infatti per uno spazio curvo qualunque vale la seguente formola, dovuta al Beltrami [1]:

$$\int_S V \, . \, \Delta_2 V \, dS + \int_S \Delta_1 V \, dS = -\int_\sigma V \cdot \frac{dV}{d\nu} \, d\sigma, \tag{5}$$

dove S è un volume, σ la superficie che lo limita e di cui ν è la normale interna.

[1] Vedi E. Beltrami, *Sulla teoria generale dei parametri differenziali.* Opere, tomo II, pag. (108), formola (8). Da questa si deduce la nostra (5) facendovi $U = V$.

In particolare, se la V soddisfa alla (I'), avremo

$$(5') \qquad \int_S \varDelta_1 V \, dS = -\int_\sigma V \frac{dV}{d\nu} d\sigma .$$

Si osservi che la (2) è per la sua natura una forma quadratica definita, positiva: tale dovrà essere anche la sua reciproca e quindi

$$(6) \qquad \varDelta_1 V = \sum_{1}^{3}{}_{rs} a^{(rs)} \frac{\partial V}{\partial x_r} \frac{\partial V}{\partial x_s} > 0 ,$$

ed è $= 0$ solo se tutte le $\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$ si annullano.

Sia ora P il supposto punto (isolato) di massimo. Si potrà allora trovare un suo intorno in cui $V < 0$. Le superfici di livello che circondano P corrisponderanno, per un intorno sufficientemente piccolo, a valori decrescenti di γ (dato che V ha un massimo in P). Sia σ una di queste superficie. Su essa avremo $V = \varepsilon < 0$ e $\dfrac{dV}{d\nu} < 0$. Il secondo membro della (5') è quindi negativo, mentre il primo è positivo. L'uguaglianza (5') è quindi impossibile, ed è perciò assurdo supporre l'esistenza di un punto P di massimo [1]. Analoga dimostrazione si ha pel caso di linee, superfici, o volumi di massimo.

Una difficoltà si avrebbe nel caso che linee, superfici o volumi di massimo si estendessero in parte all' infinito, potendo allora non aver significato gli integrali della (5').

Consideriamone un caso. Sia Σ una superficie (isolata), estendentesi in parte all' ∞ e su cui V ha il valore massimo zero: prendiamone un punto Q. In un suo intorno sufficientemente piccolo è sempre $V < 0$: inoltre, diminuendo eventualmente l' intorno, si potrà fare in modo che sulla superficie σ che lo limita sia $\dfrac{dV}{d\nu} < 0$ (e ciò per la proprietà di massimo della V in Q). Sarà solo $V = 0$ nei punti comuni all' intorno e a Σ, ed eventualmente $\dfrac{dV}{d\nu} = 0$ nei punti comuni a Σ e σ. Ciò posto, è chiaro che la (5') non può essere soddisfatta. E così per gli altri casi.

Dal ragionamento che precede si deduce che deve essere $\lambda = \mu$ e quindi

$$(7) \qquad V = c \text{ (costante assoluta).}$$

Ma allora dalle (II), essendo $V_{ik} = 0$, deduciamo

$$(8) \qquad \alpha_{ik} = 0 .$$

Le (8) indicano precisamente che lo spazio è a curvatura nulla, cioè euclideo.

(1) Se $V = 0$ fosse un minimo si avrebbe sulla σ $V = \varepsilon > 0$, $\dfrac{dV}{d\nu} > 0$ e quindi la medesima impossibilità per la (5')

§ 2. Seconda dimostrazione. — Dacchè per ipotesi manca ogni azione perturbatrice, si può in particolare desumerne che il nostro spazio (2) è simmetrico intorno ad ogni suo punto. Si può allora mettere il dl^2 sotto la forma [1]

$$dl^2 = dg^2 + \sigma^2(g)\left[d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2\right]. \tag{9}$$

La (9) riferisce il nostro spazio alle coordinate polari geodetiche col polo in un punto P: g rappresenta la distanza geodetica da P. Le $\varphi = \text{cost}$ rappresentano superfici geodetiche passanti per P [2]. Per ognuna di esse la curvatura gaussiana in P è data dalla nota formola [3]

$$K = -\frac{1}{\sigma(g)}\,\frac{\partial^2\sigma(g)}{\partial g^2},$$

facendovi $g = 0$: essa è identica per tutte le dette superfici.

Si osservi ora che le formole di trasformazione per cui

$$d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2 = d\theta_1^2 + \operatorname{sen}^2\theta_1\, d\varphi_1^2,$$

contengono ∞^3 parametri. Tutte le superfici $\varphi_1 = \text{cost}$ sono geodetiche ed hanno in P la medesima curvatura gaussiana. Le ∞^2 superfici geodetiche passanti per P hanno ivi quindi la medesima curvatura gaussiana.

Ma questo fatto si verifica per ogni punto del nostro spazio. Infatti in un altro punto P, rispetto a cui lo spazio deve pure essere simmetrico, avremo

$$dl_1^2 = dg_1^2 + \sigma_1^2(g_1)\left[d\Theta^2 + \operatorname{sen}^2\Theta\, d\Phi^2\right].$$

Per il teorema di Schur il nostro spazio deve essere quindi a curvatura Riemanniana costante [4].

Ma essendo, per la (I), la curvatura media nulla, la curvatura Riemanniana è nulla, quindi lo spazio è euclideo ed avremo $\alpha_{ik} = 0$.

Prendendo allora per x_1, x_2, x_3 coordinate cartesiane, avremo dalle (II)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\, \partial x_k} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

quindi

$$V = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c$$

con c, c_i costanti. Ma V deve essere sempre finita, cosicchè

$$V = c.$$

[1] Vedi A. Palatini, *Lo spostamento del perielio di Mercurio e la deviazione dei raggi luminosi secondo la teoria di Einstein*. Nuovo Cimento, luglio 1917. La (9) è la formola (5) del § 2 con leggero cambiamento nelle notazioni.

[2] Vedi Palatini, loc. cit., § 3.

[3] Vedi Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, Pisa, Spoerri, 1902, vol. I, cap. VI, § 89.

[4] Vedi Bianchi, loc. cit., § 161.