ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Fisica. — *Pireliometro integrale.* Nota di A. AMERIO, presentata dal Socio CANTONE.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Geodesia. — *Sopra un caso limite notevole di triangoli geodetici.* Nota di CORRADINO MINEO, presentata dal Socio P. PIZZETTI.

1. Nelle *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, il Darboux dà una nuova dimostrazione del teorema per il quale le superficie che ammettono una sola relazione tra i sei elementi del loro triangolo geodetico sono unicamente le applicabili su superficie di rotazione. A questo scopo l'illustre geometra s'appoggia sulla considerazione d'un nuovo caso limite dei triangoli geodetici, avvertendo però che le sue osservazioni non sono forse esenti da ogni obiezione [1].

Qui mi permetto di mostrare come le formole date dal Darboux, e altre, assai interessanti per se stesse, si possano stabilire direttamente in modo semplice, rigoroso e affatto indipendente dalle considerazioni di Calcolo delle variazioni, delle quali l'autore si giova.

La nuova dimostrazione mette inoltre in evidenza notevoli proprietà della funzione ψ, che entra nello sviluppo del quadrato della distanza geodetica di due punti secondo le potenze delle coordinate polari di essi.

2. Consideriamo un triangolo geodetico ABC, descritto sopra una superficie qualunque, del quale, al solito, indicheremo con A, B, C le misure degli angoli e con a, b, c quelle dei lati opposti. Supponiamo che uno dei vertici, p. es. B, tenda in un modo qualunque a un punto D *interno* al lato opposto b: allora gli angoli A e C tenderanno a zero, l'angolo B tenderà a π, i lati a e c tenderanno rispettivamente ad α e γ, essendo α la lunghezza dell'arco geodetico CD e γ quella dell'arco geodetico AD$(\alpha+\gamma=b)$.

Si tratta di dimostrar le formole

$$\lim_{A=C=0} \frac{a+c-b}{A \times C} = \frac{[b]}{2}, \tag{1}$$

$$\lim_{A=0,B=\pi} \frac{\pi - B}{A} = \frac{[b]}{[\alpha]}, \tag{2}$$

$$\lim_{A=C=0} \frac{A}{C} = \frac{[\alpha]}{[\gamma]}, \tag{3}$$

[1] Darboux, *Théorie générale des surfaces*, 3me Partie, 1894, pag. 187.

essendo $[b], [\alpha], [\gamma]$ rispettivamente le *lunghezze ridotte* (Christoffel) degli archi geodetici b, α, γ.

Riferiamo la superficie a coordinate geodetiche polari, polo nel vertice C, e, adoperando le stesse notazioni del Darboux (capitolo VIII del libro VI), chiamiamo u_0, v_0 le coordinate di A; u, v quelle di B; θ la lunghezza dell'arco geodetico AB. Avremo

$$u_0 = b \quad , \quad u = a \quad , \quad v - v_0 = \mathrm{C} \quad , \quad \theta = c\,; \tag{4}$$

e poi

$$\theta^2 = u^2 + u_0^2 - 2\, u u_0 \cos(v - v_0) + 2\, u^2 u_0^2\, \psi \operatorname{sen}^2(v - v_0), \tag{5}$$

essendo

$$\psi = \mathrm{P} + \frac{1}{2}\mathrm{Q}u + \frac{1}{2}\mathrm{Q}_0 u_0 + \cdots \text{ (1)}. \tag{6}$$

Inoltre

$$\operatorname{sen} \mathrm{A} = -\frac{1}{\lambda_0}\frac{\partial\theta}{\partial v_0} \quad , \quad \operatorname{sen} \mathrm{B} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\theta}{\partial v} \text{ (2)}. \tag{7}$$

dove λ (coefficiente dell'elemento lineare $ds^2 = du^2 + \lambda^2 dv^2$ della superficie) s'intende calcolato nel punto (u, v), mentre λ_0 è calcolato nel punto (u_0, v_0).

Dalle (5) e (7) segue

$$\frac{(\theta + u - u_0)(\theta + u_0 - u) + 2 u u_0 [\cos(v - v_0) - 1]}{\operatorname{sen} \mathrm{A} \operatorname{sen}(v - v_0)} = \frac{2\theta\psi u u_0 \lambda_0}{\sigma}, \tag{8}$$

essendo

$$\sigma = 1 + 2 u u_0 \psi \cos(v - v_0) - u u_0 \frac{\partial\psi}{\partial v_0}\operatorname{sen}(v - v_0). \tag{9}$$

Il 2° membro della (8), quando il vertice B tende al punto D, ammette limite ben determinato; dunque anche il 1° membro ammette limite. E abbiamo, denotando con ψ^* quel che diventa ψ (funzione di u, v, u_0, v_0) per $u = \alpha$, $v = v_0$ e badando alla 1ª delle (7):

$$2\gamma \lim \frac{\theta + u - u_0}{\mathrm{A}(v - v_0)} + 2 \lim \frac{\theta u u_0 \lambda_0 [\cos(v - v_0) - 1]}{\sigma u u_0 \operatorname{sen}^2(v - v_0)} = \frac{2\alpha\gamma u_0 \lambda_0 \psi^*}{1 + 2\alpha u_0 \psi^*},$$

ossia

$$2\gamma \lim \frac{\theta + u - u_0}{\mathrm{A}(v - v_0)} - \frac{\gamma\lambda_0}{1 + 2\alpha u_0 \psi^*} = \frac{2\alpha\gamma u_0 \lambda_0 \psi^*}{1 + 2\alpha u_0 \psi^*},$$

dalla quale

$$\lim_{\mathrm{A}=0, v=v_0} \frac{\theta + u - u_0}{\mathrm{A}(v - v_0)} = \frac{\lambda_0}{2}\,;$$

(1) Darboux, III, pp. 166-167.

(2) Ibidem, pag. 169.

e poichè, com' è noto, $\lambda_0 = [u_0] = [b]$, la (1), tenute presenti le (4), è dimostrata.

Dalle (7), poi, badando che

$$\lim_{v=v_0} \frac{\frac{\partial \theta}{\partial v}}{\frac{\partial \theta}{\partial v_0}} = -1 \quad , \quad \lim_{v=v_0, u=\alpha} \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{[b]}{[\alpha]},$$

segue subito

$$\lim_{A=0, B=\pi} \frac{\text{sen B}}{\text{sen A}} = \frac{[b]}{[\alpha]};$$

e quindi la (2).

Similmente si trova senza difficoltà

$$\lim \frac{\text{sen A}}{\text{sen}(v-v_0)} = \lim \frac{u u_0 \sigma}{\theta \lambda_0} = \frac{\alpha u_0}{\gamma \lambda_0}(1 + 2\alpha u_0 \psi^*),$$

ovvero

$$\lim_{A=C=0} \frac{A}{C} = \frac{\alpha b}{\gamma [b]}(1 + 2\alpha b \psi^*). \tag{10}$$

3. Per stabilire la (3), esaminiamo un caso finora escluso, cioè che il vertice B tenda a un estremo del lato b, p. es. al punto C, *percorrendo il lato* BC. In tal caso a e A tendono a zero, c tende a b, C resta costante e B tende a $\pi - C$. La 1ª delle (7) dà subito

$$\lim_{u=A=0} \frac{u}{\text{sen A}} = \frac{\lambda_0}{\text{sen}(v-v_0)}, \tag{11}$$

ossia

$$\lim_{a=A=0} \frac{a}{A} = \frac{[b]}{\text{sen C}}. \tag{11*}$$

Notiamo che nel caso particolare d'un triangolo geodetico rettangolo in C, la (11*) diviene

$$\lim_{a=A=0} \frac{a}{A} = [b],$$

che esprime un teorema di Christoffel [1].

Scriviamo la (5) così:

$$(\theta - u_0)(\theta + u_0) = u^2 - 2uu_0 \cos(v-v_0) + 2u^2 u_0^2 \psi \,\text{sen}^2(v-v_0);$$

[1] Cfr. Darboux, loc. cit., pag. 111.

poi dividiamola per sen A e passiamo al limite col tener presente la (11*): segue senza difficoltà

$$\lim_{A=0,\theta=u_0} \frac{\theta - u_0}{\operatorname{sen} A} = -\lambda_0 \operatorname{cotg} C\,,$$

ossia

$$\lim_{c=b,\,A=0} \frac{c-b}{A} = [-b] \operatorname{cotg} C\,. \tag{12}$$

Da (11*) e (12)

$$\lim_{A=0,\,c=b} \frac{a+c-b}{A} = [b] \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C\,. \tag{13}$$

4. Ma torniamo al caso in cui il vertice C si fa tendere al punto D, e supponiamo, in particolare, che vi tenda *movendosi lungo l'arco geodetico* CD.

Applicando allora ai due triangoli geodetici BDC e BDA la relazione (11*), potremo scrivere, denotando con D l'angolo BDC e con h l'arco geodetico BD:

$$\lim \frac{h}{\operatorname{sen} C} = \frac{[\alpha]}{\operatorname{sen} D}\,, \quad \lim \frac{h}{\operatorname{sen} A} = \frac{[\gamma]}{\operatorname{sen} D}\,;$$

e da queste la (3).

5. Poichè, d'altra parte, il limite di A : B, come mostra la (10), è indipendente dal modo con cui il punto C tende a D, deduciamo dalla (10) e dalla (2), ora dimostrata:

$$1 + 2\alpha u_0 \psi^* = \frac{[\alpha]}{\alpha} \cdot \frac{[b]}{b} \cdot \frac{\gamma}{[\gamma]}\,, \tag{14}$$

che costituisce una delle accennate proprietà della ψ.

Ne otteniamo un'altra così. Facciamo tendere il punto B ad A *lungo l'arco geodetico* BA; avremo, per la (11*) del n. 3 applicata al presente caso:

$$\lim_{\theta=0,\,v=v_0} \frac{\theta}{\operatorname{sen}(v-v_0)} = \frac{\lambda_0}{\operatorname{sen} A}\,;$$

tenendo presente la quale, dalla relazione

$$\operatorname{sen} A = \frac{u u_0 \sigma \operatorname{sen}(v - v_0)}{\theta \lambda_0}\,,$$

passando al limite per $\theta = 0$, $v = v_0$, deduciamo subito

$$\lambda_0^2 = u_0^2(1 + 2 u_0^2 \psi_0) , \tag{15}$$

essendo ψ_0 quel che diventa ψ per $u = u_0$, $v = v_0$ (¹).

Fisica. — *Sul doppio strato elettrico al contatto del mercurio con l'aria ionizzata dai raggi di Röntgen* (²). Nota dei professori V. Polara ed A. Maresca, presentata dal Socio A. Riccò.

Una ricerca del Reboul (³) tende a dimostrare che la costante capillare del mercurio al contatto con l'aria o con i liquidi isolanti ionizzati dai raggi X subisce, sotto l'azione di una forza elettromotrice, variazioni analoghe a quelle che si palesano nel caso del mercurio al contatto con gli elettroliti.

Poichè tali variazioni si rilegano all'esistenza ed alle modificazioni di un doppio strato elettrico al contatto (⁴), ci è parso interessante tentare di mettere *direttamente* in evidenza tale doppio strato al contatto del mercurio con l'aria ionizzata dai raggi X, ricercando se una variazione della superficie di contatto è capace di determinare una variazione di potenziale del mercurio, o, in altri termini, una variazione di densità nel doppio strato.

In una precedente Nota (⁵) abbiamo accennato alle difficoltà che ci si presentarono quando, sperimentando col mercurio al contatto di liquidi organici debolmente conduttori, si tentò incidentalmente di riprodurre il fe-

(¹) La (15) si può stabilire direttamente tenendo presente che θ verifica l'equazione

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 = 1 .$$

Quanto alla (14), noterò, come semplice verifica, che i termini dello sviluppo di $[\gamma]$ dedotti da essa, giovandosi dei termini dello sviluppo di ψ calcolati dal Darboux (loc. cit., pag. 167), coincidono con i corrispondenti dedotti sviluppando in serie il 2° membro della nota relazione (cfr. Darboux, loc. cit., pag. 99)

$$[\gamma] = [\alpha][u_0] \int_\alpha^{u_0} \frac{du}{\lambda^2} ,$$

dove nella funzione λ sotto il segno integrale s'intende posto $v = v_0$.

(²) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Catania, diretto dal prof. G. P. Grimaldi.

(³) Reboul, Journal de Physique, 1908, vol. VII, pag. 846.

(⁴) Pellat, *Cours d'électricité*, tome III, pag. 145.

(⁵) Polara e Maresca, Rend. R. Acc. Lincei, vol. XXVI, 1917, pag. 94.