ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Matematica. — *Le trasformazioni puntuali di una varietà che conservano le superficie a curvatura nulla.* Nota di E. BOMPIANI, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO.

1. Alla ricerca delle trasformazioni indicate [1] premetto il seguente teorema:

Una trasformazione puntuale fra due V_k che faccia corrispondere le geodetiche delle V_h corrispondenti (con h fissato $< k$) è necessariamente il prodotto di una isometria per una similitudine.

Basterà dimostrare il teorema per le V_{h+1}; per $k > h+1$ esso ne risulterà dimostrato a più forte ragione.

Sia P un punto di V_{h+1} e P' il corrispondente di V'_{h+1}; sia inoltre t una direzione di V_{h+1} in P e π un elemento di V_h ortogonale in P a t entro V_{h+1}; vogliamo mostrare che gli elementi corrispondenti t' e π' relativi a V'_{h+1} sono ortogonali. Le superficie geodetiche di V_{h+1} osculatrici alle geodetiche g di V_h in P sono tangenti a t.

Poichè ogni g si muta in una geodetica g' di V'_h, le superficie geodetiche osculatrici alle g' toccano t', quindi t' è ortogonale a π'; la trasformazione è dunque conforme: essa non conserva le geodetiche, a meno che il rapporto fra elementi lineari corrispondenti sia costante: c. v. d.

Per dare una dimostrazione analitica di questo teorema supponiamo $h = 2$; il tipo della dimostrazione è identico per h qualsiasi.

Sia

$$ds^2 = \sum_{r,s} a_{rs}\, d\tau_r\, d\tau_s \qquad (r, s = 1, 2, 3) \tag{1}$$

il quadrato dell'elemento lineare della V_3; fisseremo una superficie σ entro la V_3 ponendo $\tau_3 = \tau_3(\tau_1, \tau_2)$: scriviamo α e β in luogo di $\frac{\partial \tau_3}{\partial \tau_1}$ e $\frac{\partial \tau_3}{\partial \tau_2}$. Il quadrato dell'elemento lineare di σ è

$$ds_\sigma^2 = b_{11}\, d\tau_1^2 + 2b_{12}\, d\tau_1\, d\tau_2 + b_{22}\, d\tau_2^2 \tag{2}$$

ove

$$b_{11} = a_{11} + 2\alpha\, a_{13} + \alpha^2 a_{33} \quad , \quad b_{22} = a_{22} + 2\beta\, a_{23} + \beta^2 a_{33} \, ,$$
$$b_{12} = a_{12} + \alpha\, a_{23} + \beta\, a_{13} + \alpha\beta\, a_{33} \, .$$

[1] Vedi la mia Nota: *Nuovi criteri per l'isometria di due superficie o varietà* [questi Rend., vol. XXVII, pag. 230].

Per l'invarianza delle geodetiche di σ devono essere invarianti i simboli di Christoffel seguenti:

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_\sigma, \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}_\sigma, \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}_\sigma - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}_\sigma, \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}_\sigma - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}_\sigma$$

costruiti sulla forma (2). Si ha

$$\begin{bmatrix}11\\1\end{bmatrix}_\sigma = \frac{1}{2}\frac{\partial b_{11}}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2}\alpha\frac{\partial b_{11}}{\partial \tau_3}$$

$$\begin{bmatrix}11\\2\end{bmatrix}_\sigma = \frac{\partial b_{12}}{\partial \tau_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial b_{11}}{\partial \tau_2} + \alpha\frac{\partial b_{12}}{\partial \tau_3} - \frac{1}{2}\beta\frac{\partial b_{11}}{\partial \tau_3}$$

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}_\sigma = -\frac{b_{12}}{B}\begin{bmatrix}11\\1\end{bmatrix}_\sigma + \frac{b_{22}}{B}\begin{bmatrix}11\\2\end{bmatrix}_\sigma \quad \text{ove} \quad B = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 .$$

L'ultimo simbolo contiene, delle derivate seconde di τ_3, soltanto $\frac{\partial \alpha}{\partial \tau_1}$ col coefficiente

$$-\frac{b_{12}}{B}(a_{13} + \alpha a_{33}) + \frac{b_{22}}{B}(a_{23} + \beta a_{33})$$

il quale è dunque invariante; e per l'arbitrarietà di α e β sono pure invarianti, come si calcola immediatamente, A_{23}/A_{33} e A_{12}/A_{11} [1]; e per simmetria anche A_{12}/A_{11}, A_{13}/A_{11}, A_{21}/A_{22}, A_{23}/A_{22}, A_{31}/A_{33}, A_{32}/A_{33}.

In seguito a ciò il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} a_{1r}A_{1s} + a_{2r}A_{2s} + a_{3r}A_{3s} &= 0 \\ a_{1r}A_{1t} + a_{2r}A_{2t} + a_{3r}A_{3t} &= 0 \end{aligned} \qquad (r \neq s \neq t)$$

nelle incognite a_{rs} è invariante per la nostra trasformazione e definisce le a_{rs} a meno di un fattore di proporzionalità; quindi i coefficienti a'_{rs} della varietà trasformata sono legati alle a_{rs} dalla relazione $a'_{rs} = \lambda a_{rs}$.

Quanto poi alla natura di λ essa si conclude subito osservando che anche le geodetiche della varietà sono invarianti nella trasformazione, quindi per esempio

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} - a_{11}\left(A_{12}\frac{\partial \log\lambda}{\partial \tau_1} + A_{22}\frac{\partial \log\lambda}{\partial \tau_2} + A_{23}\frac{\partial \log\lambda}{\partial \tau_3}\right)$$

(1) A_{rs} è il complemento algebrico di a_{rs} nel determinante con esse costruito, diviso per il determinante stesso.

o, aggiungendo le altre equazioni che si ottengono per simmetria,

$$A_{i1}\frac{\partial \log \lambda}{\partial \tau_1} + A_{i2}\frac{\partial \log \lambda}{\partial \tau_2} + A_{i3}\frac{\partial \log \lambda}{\partial \tau_3} = 0 \qquad (i = 1\,,2\,,3)$$

cioè $\lambda =$ costante [1].

2. Esaminiamo le trasformazioni puntuali di una V_k che conservano le superficie a curvatura nulla: calcoleremo questa rispetto all'ambiente euclideo contenente la V_k.

Sono dunque invarianti nelle trasformazioni in esame le superficie a curvatura nulla di una V_3 *qualsiasi* immersa in V_k.

Per l'espressione già scritta della curvatura [2] si trova che debbono essere invarianti le espressioni

$$(1) \qquad \frac{1}{A^2}\left\{ \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_1} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_2} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_3} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_1} + \alpha \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_3} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_2} + \beta \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_3} \\ E_i^{rs} \end{matrix} \right\| \right\} \qquad r + s = 2$$

$$(2) \qquad \frac{1}{A^2}\left\{ \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_1} + \alpha \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_3} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_2} + \beta \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_3} \\ E_i^{20} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_1} + \alpha \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_3} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_2} + \beta \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_3} \\ E_i^{02} \end{matrix} \right\| - \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_1} + \alpha \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_3} \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_2} + \beta \dfrac{\partial x_i}{\partial \tau_3} \\ E_i^{11} \end{matrix} \right\|^2 \right\} \quad [3]$$

$\left(\text{ove si è posto } \dfrac{\partial \tau_3}{\partial \tau_1} = \alpha\,,\ \dfrac{\partial \tau_3}{\partial \tau_2} = \beta\right)$ qualsiansi α e β.

Sviluppando la (1) e tenendo conto dell'arbitrarietà di α e β si ha l'invarianza delle seguenti espressioni:

[1] Altre condizioni da ricercare evidentemente non vi sono, perchè quelle trovate sono sufficienti; per la trasformazione da esse individuata le equazioni delle geodetiche sono invarianti.

[2] Vedi *Nuovi criteri* ecc., form. 1.

[3] $$E_i^{20} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial \tau_1^2} + 2\frac{\partial^2 x_i}{\partial \tau_1 \partial \tau_3}\alpha + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \tau_3^2}\alpha^2\,;\quad E_i^{11} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + \alpha\frac{\partial^2 x_i}{\partial \tau_2 \partial \tau_3} + {}$$
$$+\,\beta\frac{\partial^2 x_i}{\partial \tau_1 \partial \tau_3} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial \tau_3^2}\alpha\beta\,;\quad E_i^{02} = \cdots$$

$$(3)\quad \frac{1}{A^2}\left\{\left\|\begin{matrix}\frac{\partial x_i}{\partial\tau_1}\\[4pt] \frac{\partial x_i}{\partial\tau_2}\\[4pt] \frac{\partial x_i}{\partial\tau_3}\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix}\frac{\partial x_i}{\partial\tau_h}\\[4pt] \frac{\partial x_i}{\partial\tau_k}\\[4pt] \frac{\partial^2 x_i}{\partial\tau_h^2}\end{matrix}\right\|\right\} = \left\{\begin{matrix}hh\\ l\end{matrix}\right\} \qquad (4)\quad \frac{1}{A^2}\left\{\left\|\begin{matrix}\frac{\partial x_i}{\partial\tau_1}\\[4pt] \frac{\partial x_i}{\partial\tau_2}\\[4pt] \frac{\partial x_i}{\partial\tau_3}\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix}\frac{\partial x_i}{\partial\tau_h}\\[4pt] \frac{\partial x_i}{\partial\tau_k}\\[4pt] \frac{\partial^2 x_i}{\partial\tau_h\,\partial\tau_k}\end{matrix}\right\|\right\} = \left\{\begin{matrix}hk\\ l\end{matrix}\right\}$$

$$(5)\quad \frac{1}{A^2}\left\{2\left\|\begin{matrix}\frac{\partial x_i}{\partial\tau_1}\\[4pt] \frac{\partial x_i}{\partial\tau_2}\\[4pt] \frac{\partial x_i}{\partial\tau_3}\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix}\frac{\partial x_i}{\partial\tau_h}\\[4pt] \frac{\partial x_i}{\partial\tau_k}\\[4pt] \frac{\partial^2 x_i}{\partial\tau_h\,\partial\tau_l}\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}\frac{\partial x_i}{\partial\tau_1}\\[4pt] \frac{\partial x_i}{\partial\tau_2}\\[4pt] \frac{\partial x_i}{\partial\tau_3}\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix}\frac{\partial x_i}{\partial\tau_l}\\[4pt] \frac{\partial x_i}{\partial\tau_k}\\[4pt] \frac{\partial^2 x_i}{\partial\tau_h^2}\end{matrix}\right\|\right\} = 2\left\{\begin{matrix}hl\\ l\end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix}hh\\ h\end{matrix}\right\},\quad h \neq k \neq l.$$

Nelle trasformazioni in esame si conservano le geodetiche dello V_2 *immerse in* V_k.

Se $k > 3$, per il teorema del n. 1, la proprietà trovata basta a concludere che:

Una trasformazione puntuale fra due varietà V_k $(k > 3)$ *che faccia corrispondere i loro elementi superficiali di 2° ordine a curvatura nulla è necessariamente il prodotto di una isometria per una similitudine.*

3. Per quanto riguarda le V_3, le condizioni ricavate dall'invarianza di (2) portano all'invarianza delle seguenti espressioni:

$$\frac{1}{A^2}\left\{\left|\begin{matrix}h\\k\\hh\end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix}h\\k\\kk\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}h\\k\\hk\end{matrix}\right|^2\right\},$$

$$\frac{1}{A^2}\left\{\left|\begin{matrix}h\\k\\kk\end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix}k\\l\\ll\end{matrix}\right| + \left|\begin{matrix}k\\l\\kk\end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix}h\\k\\ll\end{matrix}\right| - 2\left|\begin{matrix}k\\l\\kl\end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix}h\\k\\kl\end{matrix}\right|\right\} +$$
$$+ \frac{2}{A^2}\left\{\left|\begin{matrix}k\\l\\kl\end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix}k\\l\\hk\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}k\\l\\kk\end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix}k\\l\\hl\end{matrix}\right|\right\},$$

$$\frac{1}{A^2}\left\{\left|\begin{matrix}h\\k\\hh\end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix}h\\k\\ll\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}h\\k\\lh\end{matrix}\right|^2\right\} + \frac{1}{A^2}\left\{\left|\begin{matrix}l\\h\\hh\end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix}l\\h\\kk\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}l\\h\\hk\end{matrix}\right|^2\right\} +$$
$$+ \frac{2}{A^2}\left\{\left|\begin{matrix}l\\h\\hk\end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix}h\\k\\lh\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}l\\h\\hh\end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix}h\\k\\lk\end{matrix}\right|\right\} + \frac{2}{A^2}\left\{\left|\begin{matrix}h\\k\\hk\end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix}l\\h\\lh\end{matrix}\right| - \left|\begin{matrix}h\\k\\hh\end{matrix}\right| \cdot \left|\begin{matrix}l\\h\\lk\end{matrix}\right|\right\},$$

$$\frac{1}{A^2}\left\{\begin{vmatrix} h\\ k\\ ll\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} h\\ l\\ kk\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} h\\ l\\ ll\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} h\\ k\\ kk\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} h\\ k\\ kl\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} h\\ l\\ kl\end{vmatrix}\right\}+$$

$$+\frac{2}{A^2}\left\{\begin{vmatrix} l\\ k\\ hh\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} l\\ k\\ lk\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} l\\ k\\ kl\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} l\\ k\\ kh\end{vmatrix}\right\}+$$

$$+\frac{2}{A^2}\left\{\begin{vmatrix} h\\ k\\ hl\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} l\\ k\\ lk\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} h\\ k\\ kl\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} l\\ k\\ hl\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} h\\ k\\ hk\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} l\\ k\\ ll\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} l\\ k\\ hk\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} h\\ k\\ ll\end{vmatrix}\right\}+$$

$$+\frac{2}{A^2}\left\{\begin{vmatrix} l\\ k\\ hl\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} h\\ l\\ kk\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} l\\ k\\ kk\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} h\\ l\\ hl\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} l\\ k\\ hk\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} h\\ l\\ kl\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} l\\ k\\ lk\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} h\\ l\\ hk\end{vmatrix}\right\}$$

ove si è scritto per brevità

$$\begin{vmatrix} h\\ k\\ rs\end{vmatrix}\quad\text{in luogo di}\quad\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial x_i}{\partial\tau_h}\\[2mm] \dfrac{\partial x_i}{\partial\tau_k}\\[2mm] \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial\tau_r\,\partial\tau_s}\end{matrix}\right\|.$$

Queste espressioni si costruiscono con i coefficienti a_{rs} e con le loro derivate prime e seconde; si hanno quindi, oltre le condizioni portate dalle (3-5), nuove equazioni a derivate parziali del 2° ordine alle quali debbono soddisfare i coefficienti della varietà trasformata a_{rs}.

Queste equazioni, come le altre ricordate, rimangono invariate, sostituendo alle funzioni incognite altre proporzionali: ma non si può escludere che esistano soluzioni non proporzionali fra loro. Ciò in generale non accade certo quindi *per una* V_3 *generica sussiste l'ultimo teorema enunciato per una* V_k. Per tipi particolari di V_3 possono esistere trasformazioni diverse da quelle trovate che conservano le superficie a curvatura nulla.

Tali sono gli S_3 (euclidei) per i quali le trasformazioni omografiche conservano le superficie a curvatura nulla (sviluppabili). Ciò non vale in uno S_k ($k > 3$) perchè in esso le superficie a curvatura nulla non sono caratterizzate proiettivamente, quindi non sono invarianti per il gruppo delle omografie ([1]).

([1]) Una discussione completa del caso $k=3$ può farsi solo in base alla conoscenza dei tipi di V_3 rappresentabili geodeticamente (senza essere applicabili) sulle varietà trasformate, al quale problema, come ho accennato nella Nota già citata, ho dedicato un altro lavoro.