ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Matematica. — *Sulle superficie rigate.* Nota di C. BURALI-FORTI, presentata dal Corrispondente R. MARCOLONGO.

Sia P il punto generico di una linea di arco s [1] ed $\mathbf{u}$ un vettore unitario funzione di s. La retta $P\mathbf{u}$ descrive, col variare di s, una rigata sulla quale è tracciata la linea P. Detto φ l'angolo che $\mathbf{t}$ fa con $\mathbf{u}$, derivando rispetto ad s la $\mathbf{t} \times \mathbf{u} = \cos\varphi$ si ha, indicando le derivate con gli apici,

$$(a) \qquad (1/\varrho)\, \mathbf{n} \times \mathbf{u} + \mathbf{t} \times \mathbf{u}' = -\varphi' \operatorname{sen} \varphi .$$

La linea P è una *geodetica* della rigata solo quando $\mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0$, per ogni s, perchè il piano tangente in P alla rigata è normale al vettore $\mathbf{t} \wedge \mathbf{u}$ e si ha $0 = \mathbf{n} \wedge (\mathbf{t} \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{n} \times \mathbf{u} . \mathbf{t}$ solo quando $\mathbf{n} \times \mathbf{u} = 0$.

La linea P è di *stringimento* per la rigata solo quando $\mathbf{t} \times \mathbf{u}' = 0$, perchè, essendo il piano assintotico [c] normale ad $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}'$ solo in quel caso si ha $0 = (\mathbf{t} \wedge \mathbf{u}) \times (\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}') = -\mathbf{t} \times \mathbf{u}'$.

La linea P è *traiettoria delle generatrici* della rigata solamente quando, ed è ovvio, $\varphi = \text{cost}$, cioè $\varphi' = 0$.

Dunque la (a) esprime che: « se una linea di una rigata ha due delle proprietà seguenti; è *geodetica*; è di *stringimento*; è *traiettoria delle generatrici*; ha anche la terza ». Cioè abbiamo dimostrato in modo del tutto elementere un noto teorema di Bonnet senza ricorrere alla curvatura geodetica e ai simboli di Christoffel [2].

Questa notevole semplificazione della dimostrazione del teorema di Bonnet lascia prevedere altre semplificazioni per la teoria generale delle rigate, non escluse le questioni che riguardano la loro flessione. In questa Nota stabilisco appunto il procedimento fondamentale e generale che è tanto semplice da poter dare anche la *curvatura media* (che per la sua eccessiva complicazione si trascura con gli ordinari metodi algebrici) dalla cui espressione si ricava immediatamente il noto teorema relativo alle *rigate di area*

[1] Si considerano i soliti elementi $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}, \varrho, \tau$ legati dalle formule di Frenet. Per le sup. rigate e le linee si possono esaminare i miei lavori seguenti: [a] *Introduction à la Géometrie differentielle* (Gauthier-Villars. Paris, 1897); [b] *Lezioni di geometria metrico proiettiva* (Bocca, Torino, 1904); [c] *Geometria analitico proiettiva* (G. B. Petrini, Torino, 1912); [d] *Fondamenti per la geometria differenziale su di una superficie* (Rend. Palermo, tomo XXXIII); [e] *Linea in ogni cui punto è assegnata una direzione invariabilmente collegata al triedro principale* (Atti R. Acc. Torino, vol. LIII, 1918).

[2] Per la completa eliminazione dei simboli di Christoffel e la trattazione assoluta degli spazî curvi, cfr. una interessante Memoria di T. Boggio di prossima pubblicazione.

minima; si ha sotto forma semplice l'omografia σ ([d]) e quindi le direzioni delle *assintotiche* e *linee di curvatura*; i metodi di Minding e di Beltrami per la flessione delle rigate acquistano forma geometrica semplicissima; ecc.

1. Insieme al vettore $\mathbf{u}$, che dà la direzione della *generatrice* della rigata uscente dal punto generico P della *direttrice* (del tutto arbitraria, essendo inutile, per la semplicità dei calcoli, considerare una linea speciale della rigata), introduco pure i noti ([e]) elementi $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $1/m$, $1/n$, Ω determinati da $\mathbf{u}$.

Il vettore unitario $\mathbf{t}$ è legato ad $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, da

$$\mathbf{t} = \cos\varphi\,\mathbf{u} + \operatorname{sen}\varphi(\cos\lambda\,\mathbf{v} + \operatorname{sen}\lambda\,\mathbf{w}) \tag{1}$$

con φ, λ numeri reali funzioni arbitrarie di s e il cui significato geometrico è ovvio. Facilmente si determinano le condizioni cui devono soddisfare m, n, φ, λ affinchè la rigata sia *sviluppabile* o non, sia un *cono* o un *cilindro*, affinchè la linea P sia, *geodetica*, *assintotica*, di *curvatura*, di *stringimento*, *traiettoria*; ma di ciò non intendiamo occuparci.

Il punto generico della rigata, nella generatrice $P\mathbf{u}$, sia

$$Q = P + x\mathbf{u} \tag{2}$$

essendo x la distanza, arbitraria, di Q da P e quindi Q funzione delle due variabili indipendenti s, x.

Nel punto Q la normale alla rigata sia parallela al vettore unitario ([d]), necessariamente normale ad $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{N} = \cos\theta\,\mathbf{v} + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{w} \tag{3}$$

e introduciamo i due numeri

$$x_0 = -m\operatorname{sen}\varphi\cos\lambda\,, \qquad h = -m\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\lambda \tag{4}$$

dei quali vedremo subito il significato geometrico.

Il piano tangente alla rigata nel punto di Q è normale al vettore ([d]) $(P' + x\mathbf{u}')\wedge\mathbf{u} = \mathbf{t}\wedge\mathbf{u} - (x/m)\,\mathbf{w}$; il piano assintotico è normale al vettore $\mathbf{u}\wedge\mathbf{u}' = (1/m)\,\mathbf{w}$; dunque nel *punto centrale*, o *punto di stringimento* si deve avere

$$0 = \{\mathbf{t}\wedge\mathbf{u} - (x/m)\,\mathbf{w}\}\times\mathbf{w} = -\,\mathbf{t}\wedge\mathbf{v} - x/m = -\operatorname{sen}\varphi\cos\lambda - x/m\,,$$

vale a dire il punto centrale nella generatrice $P\mathbf{u}$ è

$$C = P - m\operatorname{sen}\varphi\cos\lambda\,\mathbf{u} = P + x_0\mathbf{u} \tag{5}$$

e si ha così il significato di x_0.

Si è già osservato che la normale alla rigata nel punto Q è parallela al vettore

$$\mathbf{t} \wedge \mathbf{u} - (x/m)\,\mathbf{w} = \operatorname{sen}\varphi(\operatorname{sen}\lambda\mathbf{v} - \cos\lambda\mathbf{w}) - (x/m)\,\mathbf{w}$$
$$= -(h/m)\,\mathbf{v} + (x_0/m)\,\mathbf{w} - (x/m)\,\mathbf{w} = -(1/m)\,\{ h\mathbf{v} + (x - x_0)\,\mathbf{w} \}\,;$$

e quindi confrontando con la (3)

$$x - x_0 = h \operatorname{tg}\theta \tag{6}$$

che è la formula di Chasles essendo h il parametro distributore. E si ha così il significato anche di h.

Per $\theta = 0$ si ha $x = x_0$, cioè $\mathbf{N} = \mathbf{v}$ e quindi θ è l'angolo che il piano tangente in Q fa col piano tangente nel punto centrale. Risulta ovviamente la proiettività fra i piani uscenti da $P\mathbf{u}$ (individuati da θ) e i relativi punti di contatto; come pure risulta che se Q_1, Q_2 sono i punti di contatto corrispondenti ai valori θ_1, $\theta_1 + \pi/2$ di θ si ha

$$(Q_1 - C) \times (Q_2 - C) = -h^2$$

e quindi Q_1, Q_2 si corrispondono in una involuzione ellittica della quale C è il centro e h il birapporto.

2. Dalle cose precedenti risulta che possiamo ritenere Q funzione delle due variabili indipendenti s, θ; il che noi faremo conservando ancora $x = x_0 + h \operatorname{tg}\theta$, funzione di s (per x_0 e h) e di θ e ponendo ([d])

$$x' = x_s' = x_0' + h' \operatorname{tg}\theta\,.$$

Se osserviamo che

$$Q_s' = \mathbf{t} + x'\mathbf{u} + \frac{x}{m}\mathbf{v} = (x' + \cos\varphi)\,\mathbf{u} + \frac{x - x_0}{m}\mathbf{v} - \frac{h}{m}\mathbf{w}$$
$$= (x' + \cos\varphi)\,\mathbf{u} + \frac{h}{m\cos\theta}(\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{v} - \cos\theta\,\mathbf{w}) =$$
$$= (x' + \cos\varphi)\,\mathbf{u} - \frac{h}{m\cos\theta}\mathbf{u} \wedge \mathbf{N}$$

si hanno subito le formule

$$\left\{\begin{aligned} & Q_s' = (x' + \cos\varphi)\,\mathbf{u} - \frac{h}{m\cos\theta}\mathbf{N}\,, \quad Q_\theta' = \frac{h}{\cos^2\theta}\mathbf{u} \\ & Q_s' \wedge Q_\theta' = -\frac{h^2}{m\cos^3\theta}\mathbf{N}\,, \quad Q_s' \wedge Q_\theta' \times \mathbf{N} = -\frac{h^2}{m\cos^3\theta}\,. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Si ha poi ovviamente ([e])

$$\left\{\begin{aligned} & \mathbf{N}_s' = \Omega \wedge \mathbf{N}\,, \quad \mathbf{N}_\theta' = \mathbf{u} \wedge \mathbf{N} \\ & \mathbf{N}_s' \wedge \mathbf{N}_\theta' = \frac{\cos\theta}{m}\mathbf{N}\,, \quad \mathbf{N}_s' \wedge \mathbf{N}_\theta' \times \mathbf{N} = \frac{\cos\theta}{m}\,. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Se allora consideriamo ([d]) l'omografia $\sigma = dN/dQ$ si ha subito dell'ultima delle (7) ed (8) [cfr. ([d]), n. 39, (4)], indicando con ε il *segno* di h,

$$(9) \qquad I_2\sigma = -(\cos^4\theta)/h^2 \quad , \quad (\cos^2\theta)/h = \varepsilon\sqrt{-I_2\sigma} .$$

Se inoltre osserviamo che dalle (7), (8) si ha

$$Q_s' \wedge N_\theta' = -(x' + \cos\varphi)\,\mathbf{N} \quad , \quad Q_\theta' \wedge N_s' = -\frac{h}{\cos^3\theta}\,\mathbf{u} \times \Omega . \mathbf{N} = \frac{h}{n\cos^2\theta}\,\mathbf{N}$$

allora si ha subito [cfr. ([d]), n. 38, (3)]

$$(10) \qquad I_1\sigma = \frac{m\cos\theta}{h}\left\{(x' + \cos\varphi)\frac{\cos^2\theta}{h} + \frac{1}{n}\right\} =$$

$$= \frac{m}{\cos\theta}\left\{\frac{\varepsilon\sqrt{-I_2\sigma}}{n} - (x' + \cos\varphi)\,I_2\sigma\right\}$$

che dà appunto, e sotto forma assai semplice, la *curvatura media*, $I_1\sigma$, della rigata nel punto generico Q.

3. Dimostriamo ora come dalla (10) si deduca subito il teorema di Catalan relativo alle *rigate* di *area minima*. Non si toglie nulla alla generalità supponendo P punto centrale, cioè $x_0 = 0$ e quindi $\cos\lambda = 0$. La formula (10) dà $I_1\sigma = 0$, per x, θ qualunque, solamente quando $1/n = 0$ e $\cos\varphi = 0$ e $x' = 0$. La $1/n = 0$ esprime ([e]) che $\mathbf{w}' = 0$, cioè $\mathbf{w} = \text{cost.}$ Dalla $\cos\varphi = 0$ si trae $\mathbf{t} = \pm\mathbf{w}$ e quindi la linea di stringimento è una retta normale a tutte le generatrici. La $x' = 0$ equivale ad $m' = 0$ cioè ad $m = \text{cost.}$ Allora la tangente in Q alla linea $\theta = \text{cost}$ è parallela al vettore $\mathbf{t} - \operatorname{tg}\theta\,\mathbf{v}$ che forma l'angolo θ con $\mathbf{t}$ e quindi le linee $\theta = \text{cost}$ sono *eliche* di asse $P\mathbf{w}$. Resta così dimostrato, con minimi mezzi, che: *le sole superficie rigate ad area minima sono gli elicoidi chiusi a piano direttore.*

4. Osservndo che $\sigma Q_\theta' = M_\theta'$, che $\sigma\mathbf{N} = 0$ ([d]) e facendo uso del noto sviluppo generico di $\sigma(\mathbf{u} \wedge \mathbf{N})$ si ha

$$(10) \qquad \begin{cases} \sigma\mathbf{u} = \varepsilon\sqrt{-I_2\sigma}\,.\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{N} \quad , \quad \sigma\mathbf{N} = 0 \\ \sigma(\mathbf{u} \wedge \mathbf{N}) = \varepsilon\sqrt{-I_2\sigma}\,.\,\mathbf{u} + I_1\sigma\,.\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{N} \end{cases}$$

e quindi per la σ

$$(11) \qquad \sigma = I_1\sigma\,.\,H(\mathbf{u} \wedge \mathbf{N}\,,\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{N}) +$$

$$+ \varepsilon\sqrt{-I_2\sigma}\,\{H(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{u} \wedge \mathbf{N}) + H(\mathbf{u} \wedge \mathbf{N}\,,\,\mathbf{u})\}$$

e si può quindi utilizzare σ per le curvature normali, torsioni geodetiche e curvature geodetiche in direzioni qualunque ([d]) ([1]).

([1]) L'equazione differenziale delle assintotiche è $dQ \times \sigma\,dQ = 0$ ([d]) cioè, riprendendo s, x come variabili indipendenti, ed osservando che, per la prima (10) $\mathbf{u} \times \sigma\mathbf{u} = 0$

$$\{(\mathbf{t} + x\mathbf{u}') \times \sigma(\mathbf{t} + x\mathbf{u}')\,ds + 2(\mathbf{t} + x\mathbf{u}') \times \sigma\mathbf{u}\,dx\}\,ds = 0$$

che si scinde in due: $ds = 0$, che dà le generatrici; l'altra è un'equazione differenziale di Riccati e dà il noto teorema del birapporto delle quattro assintotiche curvilinee fisse. Ciò si ottiene senza far uso di determinanti.

Formerà oggetto di altro studio la flessione delle rigate approfittando dei notevoli risultati ottenuti in tale campo da M. Bottasso [1].

Accenno soltanto alla riduzione assoluta dell'ordinario metodo di Minding e di Beltrami. Riprendendo s ed x come variabili indipendenti, per l'elemento lineare dS si ha

$$dS^2 = dx^2 + 2\cos\varphi\, dx\, ds + \{1 + x(x - 2x_0)/m^2\}\, ds^2$$

e si deve « dati φ, m, x_0 determinare tutte le rigate il cui elemento lineare dS ha la forma ora indicata ».

Col metodo di Minding si deve determinare $\mathbf{u}$ in guisa che $\mathbf{u}'^2 = 1/m^2$, il che si fa subito ponendo

$$\mathbf{u} = \cos\xi\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\xi(\cos\eta\,\mathbf{j} + \cos\eta\,\mathbf{k})$$

con $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ terna costante, e derivando si ha la equazione differenziale $\xi'^2 + \eta'^2 \operatorname{sen}^2\xi = 1/m^2$ che determina η fissato ξ ad arbitrio. Dopo ciò osservando che $\mathbf{t}\times\mathbf{u} = \cos\varphi$, $\mathbf{t}\times\mathbf{v} = -x_0/m$, $\mathbf{t}\times\mathbf{w} = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\lambda$ si ha $\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\lambda = x_0^2/m^2$ il che determina λ e quindi $\mathbf{t}$ e, in conseguenza,

$$P = O + \int \mathbf{t}\, ds\,.$$

Volendo seguire il metodo di Beltrami si indichi con ψ l'angolo che il piano osculatore in P fa col piano tangente in P. Si ha allora $\mathbf{n}\times\mathbf{u} = \operatorname{sen}\varphi\cos\psi$, e poichè $\mathbf{t}\times\mathbf{u} = \cos\varphi$ si ricava subito $(\mathbf{b}\times\mathbf{u})^2 = \operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\psi$. si hanno dunque per $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, le condizioni

$$\mathbf{t}\times\mathbf{u} = \cos\varphi\,,\ \mathbf{n}\times\mathbf{u} = \operatorname{sen}\varphi\cos\psi\,,\ \mathbf{b}\times\mathbf{u} = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\,,\ \mathbf{t}\times\mathbf{v} = -x_0/m\,.$$

Derivando, con le formule di Frenet, la prima si ottiene subito

$$(\alpha)\qquad (\cos\psi)/\varrho = x_0/(m^2\operatorname{sen}\varphi) - \varphi'$$

che esprime come la curvatura geodetica in P nella direzione $\mathbf{t}$ non varii con la flessione; derivando le due seguenti si ottiene la solita condizione tra $\varrho, \tau, \varphi, \psi, x_0, m$, ed eliminando ψ con la precedente, l'equazione intrinseca di P. Dopo ciò, determinati $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ da tale equazione intrinseca, si ricava ψ dalla (α) e dalle prime tre condizioni si ha

$$\mathbf{u} = \cos\varphi\,\mathbf{t} + \operatorname{sen}\varphi(\cos\psi\,\mathbf{b} + \operatorname{sen}\psi\,\mathbf{b})$$

e la rigata è così determinata.

[1] *Sulla flessione delle superfici inestendibili* (Rend. R. Accad. Lincei, vol. XXIV, ser. 5ª, 2° sem., pp. 174-182.