ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Ottica. — *Sulle ovali di Cartesio come curve aplanetiche di rifrazione* [1]. Nota del Corrispondente O. Tedone.

1. La curva chiamata dai geometri *ovale di Cartesio* è composta, come è noto, di due ovali distinte e possiede tre fochi reali, al finito, sul suo asse di simmetria, fochi che compaiono in modo perfettamente simmetrico nell'equazione razionale della curva. In questa Nota, di carattere elementare, ci proponiamo di determinare il comportamento di ciascuna delle coppie di fochi che si possono formare con i tre fochi della curva, dal punto di vista metrico ed ottico, rispetto a ciascuna delle ovali che compongono la curva stessa; comportamento che, come si vedrà, varia col variare della coppia di fochi che si considera e di ciascuna delle ovali [2].

2. Principio di minimo. *a*) « Si abbia una superficie σ di equazione « $z = z(x, y)$, separante due mezzi ottici i cui indici assoluti di rifrazione « sieno n_1 ed n_2. Sia, poi, P un punto fisso di coordinate (a_1, b_1, c_1) e Q « un altro punto fisso di coordinate (a_2, b_2, c_2). Allora, i valori *estremi* « di ciascuna delle espressioni

$$(1) \qquad L = n_1 r_1 + n_2 r_2, \qquad\qquad (1') \qquad L' = n_1 r_1 - n_2 r_2$$

« in cui

$$(2) \qquad \begin{cases} r_1 = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2}, \\ r_2 = \sqrt{(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2}, \end{cases}$$

« dinotano le distanze dei punti P e Q da un punto O di σ, sono i va- « lori di L, o di L', che corrispondono a punti O di σ tali che sieno sod- « disfatte le equazioni

$$(3) \qquad z - z(x, y) = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0 ,$$

« ovvero le altre

$$(3') \qquad z - z(x, y) = 0 \quad , \quad \frac{\partial L'}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial L'}{\partial y} = 0 .$$

[1] La ricca letteratura relativa all'ovale di Cartesio si può rilevare dal noto libro del Loria: *Ebene Kurven* (Leipzig, 1902, B. G. Teubner), pag. 174.

[2] Ne risulterà, fra l'altro, che alcune delle forme sotto le quali si suole scrivere l'equazione dell'ovale di Cartesio sono da ritenersi inesatte. Tali sono, p. es., le equazioni 32) e 33) della Memoria di Haentzschel, *Ueber ein orthogonales System von bizirkul. Kurven*... (Jahresbericht des Köllnischen Gymnasiums zu Berlin. Berlin, 1908) dalla quale Memoria abbiamo, del resto, ricavata la maniera di passare alla forma razionale dell'equazione della nostra curva.

« Per ciascuno di questi sistemi di equazioni, può accadere che esso abbia, « ovvero non abbia, soluzioni. E può anche accadere che le sue tre equa- « zioni sieno identicamente verificate quando lo sia la prima di esse. In « quest'ultimo caso i punti di σ soddisfano alla condizione $L = \text{cost}$, ovvero « $L' = \text{cost}.$, e chiameremo σ superficie *aplanetica di rifrazione* rispetto « alla coppia di punti P e Q. In ogni caso, se, per un punto O di σ, sono « soddisfatte le (3), ovvero le (3'), e si consideri PO come un raggio lumi- « noso uscente da P, supposto che questo raggio sia situato, o, almeno, « finisca con l'essere situato nel mezzo di indice n_1, possiamo ottenere il « raggio rifratto di PO con le seguenti regole:

« 1°) se sono soddisfatte le (3) e i punti P e Q sono situati da « bande opposte del piano tangente π in O a σ, il raggio rifratto di PO « è il raggio OQ;

« 2°) se sono soddisfatte le (3) e i punti P e Q sono situati dalla « stessa banda del piano tangente π, il raggio rifratto di PO è il simme- « trico di OQ rispetto al piano π;

« 3°) se sono soddisfatte le (3') e i punti P e Q giacciono dalla « stessa banda del piano π tangente a σ in O, il raggio rifratto di PO è « il prolungamento del raggio QO;

« 4°) se, in fine, sono soddisfatte le (3') ed i punti P e Q giacciono « da bande opposte del piano tangente π, il raggio rifratto di PO è il « simmetrico di OQ rispetto alla normale alla superficie σ, in O ».

Solo se siamo nel primo caso ed i raggi PO, OQ sieno contenuti per intero nei rispettivi mezzi di indici n_1 ed n_2, il principio precedente è contenuto nel *principio del minimo cammino ottico*. Nelle stesse ipotesi, se σ è una superficie aplanetica, rispetto alla coppia di punti P, Q, il punto Q è un'immagine reale di P. Se, invece, σ è aplanetica, il raggio PO è tutto contenuto nel mezzo di indice n_1 e siamo nel 3° caso, Q è immagine virtuale di P. In ogni altra ipotesi, Q non è, nè immagine reale, nè immagine virtuale di P.

b) « Se, nell'enunciato precedente, invece di supporre P fisso, si sup- « pone soltanto che P debba appartenere ad un piano α, allora i valori « estremi di L, o di L', corrispondono a punti P di α e a punti O di σ « tali che PO sia normale ad α e che, inoltre, sieno soddisfatte, ancora, « le equazioni (3), ovvero le (3'). Valgono, inalterate, le stesse regole di « prima per trovare il raggio rifratto di PO e le altre conclusioni, ed il « caso presente può considerarsi come quel caso particolare del precedente « in cui il punto P si allontani indefinitamente in direzione normale ad α.

c) « Potrebbe supporsi che si allontanino indefinitamente nella stessa « direzione, o in direzioni differenti, tutti e due i punti P e Q.

3. Superficie aplanetiche di rifrazione. — Si è visto che, se σ è una superficie aplanetica di rifrazione, rispetto ai punti P e Q, indicando

con c una costante, i suoi punti devono soddisfare all'una, o all'altra, delle due relazioni

$$(4) \quad n_1 r_1 + n_2 r_2 = c \,, \qquad \text{ovvero} \qquad (4') \quad n_1 r_1 - n_2 r_2 = c \,.$$

E, per decidere se, dei due punti P e Q, uno possa considerarsi come immagine reale, o virtuale, dell'altro, bisogna, se occorre, dividere σ in parti in modo che i piani tangenti ad essa nei punti di ciascuna di queste parti, lascino i punti P e Q sempre dalla stessa banda, o sempre da bande opposte di σ, ed applicare, poi, i criterii precedenti.

Le superficie i cui punti soddisfano alla (4), ovvero allà (4'), sono, evidentemente, superficie di rotazione intorno alla retta PQ. Possiamo, quindi, limitare la nostra attenzione allo studio di una sezione meridiana.

Scegliamo, perciò, la retta PQ come asse x, sieno e_1 ed e_2, con $e_1 > e_2$, le ascisse di P e Q e limitiamoci a studiare la sezione della superficie prodotta dal piano xy. Notiamo, però, prima, che, se $n_1 > n_2$ si possono determinare un fattore k e due altri numeri ϱ ed e_3 in modo che

$$(5) \quad kn_1 = \sqrt{\varrho - e_2} \quad , \quad kn_2 = \sqrt{\varrho - e_1} \quad , \quad kc = (e_1 - e_2)\sqrt{\varrho - e_3}$$

con $\varrho > e_1\,, e_2\,, e_3$ e le radici essendo considerate come positive. ϱ ed e_3 possono ritenersi determinati dalle equazioni

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{\varrho - e_2}}{\sqrt{\varrho - e_1}} \quad , \quad \frac{c}{n_1} = (e_1 - e_2)\frac{\sqrt{\varrho - e_3}}{\sqrt{\varrho - e_2}} \,.$$

Il parametro ϱ dipende, dunque, soltanto dall'indice di rifrazione relativo dei due mezzi separati da σ. Similmente, se $n_1 < n_2$, si possono determinare il fattore k e i due numeri ϱ ed e_3 in modo che

$$(5') \quad kn_1 = \sqrt{e_2 - \varrho} \quad , \quad kn_2 = \sqrt{e_1 - \varrho} \quad , \quad kc = (e_1 - e_2)\sqrt{e_3 - \varrho}$$

con $\varrho < e_1\,, e_2\,, e_3$ e si avrà adesso

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{e_2 - \varrho}}{\sqrt{e_1 - \varrho}} \quad , \quad \frac{c}{n_1} = (e_1 - e_2)\frac{\sqrt{e_3 - \varrho}}{\sqrt{e_2 - \varrho}} \,.$$

Ciò posto, corrispondentemente al caso $n_1 > n_2$, l'equazione della curva, sezione meridiana della superficie aplanetica da studiare, si può scrivere

$$\alpha) \quad \sqrt{\varrho - e_2}\,\sqrt{(x - e_1)^2 + y^2} \pm \sqrt{\varrho - e_1}\,\sqrt{(x - e_2)^2 + y^2} = \\ = (e_1 - e_2)\sqrt{\varrho - e_3}$$

e, corrispondentemente al caso $n_1 < n_2$, si può scrivere

$$\beta)\qquad \sqrt{e_2-\varrho}\,\sqrt{(x-e_1)^2+y^2} \pm \sqrt{e_1-\varrho}\,\sqrt{(x-e_2)^2+y^2} = \\ =(e_1-e_2)\sqrt{e_3-\varrho}\,,$$

i segni $+$, o $-$, corrispondendo alle due diverse ipotesi (4) e (4').

Senza limitare in alcun modo il nostro studio, come si vedrà in appresso, potremo sempre supporre che sia

$$(6)\qquad e_1 > e_2 > e_3\,.$$

Anzi, poichè le equazioni α) e β) restano inalterate aumentando $x, e_1, e_2, e_3, \varrho$ di una stessa quantità possiamo sempre supporre di aver scelto l'origine degli assi in modo che sia

$$(7)\qquad e_1+e_2+e_3=0 \quad \text{donde} \quad e_1>0\,,\; e_3<0\,.$$

Possiamo considerare, per dippiù, le e come radici di un'equazione della forma

$$(8)\qquad \varphi(s)=4s^3-g_2 s-g_3=0$$

con

$$(8')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{g_2}{4} &= -(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1)=e_1^2-e_2e_3=e_2^2-e_3e_1=e_3^2-e_1e_2\,,\\ \frac{g_3}{4} &= e_1e_2e_3\,. \end{aligned}\right.$$

Nel seguito interpreteremo anche e_3 e ϱ come ascisse di due punti dell'asse x ed indicheremo con E_1, E_2, E_3 i punti di ascisse e_1, e_2, e_3 e con r_i il raggio vettore che dal punto E_i va ad un punto qualunque del piano della curva.

4. Forme principali dell'equazione dell'ovale di Cartesio. — Dalle identità

$$(\varrho-e_2)r_1^2-(\varrho-e_1)r_2^2=(e_1-e_2)[x^2+y^2-\varrho(2x+e_3)-e_1e_2]= \\ =(\sqrt{\varrho-e_2}\,r_1+\sqrt{\varrho-e_1}\,r_2)(\sqrt{\varrho-e_2}\,r_1-\sqrt{\varrho-e_1}\,r_2)= \\ =-(\sqrt{e_2-\varrho}\,r_1+\sqrt{e_1-\varrho}\,r_2)(\sqrt{e_2-\varrho}\,r_1-\sqrt{e_1-\varrho}\,r_2)$$

si ricava subito che, se vale la α), sia che in essa si consideri il segno $+$, o il segno $-$, è

$$(9)\quad 2\sqrt{\varrho-e_3}\,\sqrt{\varrho-e_2}\,r_1=(x-\varrho)^2+y^2-\varrho^2+2e_1\varrho+e_1^2+e_2e_3\,,$$

mentre, se vale la β), qualunque sia il segno che in essa si consideri, è

$$(9')\quad 2\sqrt{e_3-\varrho}\,\sqrt{e_2-\varrho}\,r_1=-[(x-\varrho)^2+y^2-\varrho^2+2e_1\varrho+e_1^2+e_2e_3].$$

Elevando a quadrato, tanto la (9) che la (9′) conducono alla stessa equazione razionale che si può porre sotto la forma

$$\text{A)} \qquad \left\{(x-\varrho)^2+y^2-\frac{1}{4}\varphi'(\varrho)\right\}^2-\varphi(\varrho)(2x+\varrho)=0\,,$$

ovvero, ordinata secondo le potenze di ϱ,

$$\text{B)} \qquad -4\varrho^2y^2+\left[g_3-4x\left(x^2+y^2-\frac{g_2}{4}\right)\right]\varrho+ \\ +\left(x^2+y^2+\frac{g_2}{4}\right)^2+2g_3x=0\,.$$

Seguendo la nomenclatura adoperata dai geometri, chiameremo ovale di Cartesio, tutta intera la curva rappresentata dall'equazione A), o B).

Queste equazioni contengono le ascisse e_1, e_2, e_3 in modo simmetrico e restano, quindi, inalterate, eseguendo, su questi numeri, delle permutazioni arbitrarie. Queste permutazioni sono, quindi, lecite anche sulle (9) e (9′).

Scegliendo come polo uno qualunque dei punti E_i, come asse polare l'asse x e chiamando ω_i la corrispondente anomalia, si trova, subito, l'equazione polare dell'ovale di Cartesio sotto la forma

$$\text{C)} \qquad r_i^2+2\left[(e_i-\varrho)\cos\omega_i-\sqrt{\varrho-e_{i+1}}\sqrt{\varrho-e_{i+2}}\right]r_i+\mathrm{R}_i^2=0$$

in cui si è posto

$$\mathrm{R}_i^2=(e_i-e_{i+1})(e_i-e_{i+2})\,.$$

L'equazione C) si può dedurre dalla (9) e vale per il caso di $\varrho>e_1$. Per il caso $\varrho<e_3$ l'equazione corrispondente alla C) si può ricavare dalla (9′) e si ottiene dalla C) stessa sostituendo

$$-\sqrt{e_{i+1}-\varrho}\sqrt{e_{i+2}-\varrho} \quad \text{a} \quad \sqrt{\varrho-e_{i+1}}\sqrt{\varrho-e_{i+2}}\,.$$

Tenendo presente che il primo membro della A) è di secondo grado in ϱ, dividendo questo primo membro per $\varphi(\varrho)$ e scomponendo quindi la funzione di ϱ così risultante in frazioni elementari, si trova subito che la equazione dell'ovale di Cartesio si può anche scrivere

$$\text{D)} \qquad \frac{\mathrm{S}_1^2}{\mathrm{R}_1^2(\varrho-e_1)}+\frac{\mathrm{S}_2^2}{\mathrm{R}_2^2(\varrho-e_2)}+\frac{\mathrm{S}_3^2}{\mathrm{R}_3^2(\varrho-e_3)}=0$$

nella quale si è posto

$$(10) \qquad \mathrm{S}_i=(x-e_i)^2+y^2-\mathrm{R}_i^2\,.$$

5. Proprietà principali dell'ovale di Cartesio. — L'ovale di Cartesio è una curva algebrica di quarto ordine avente una cuspide in cia-

scuno dei punti ciclici del suo piano. Le tangenti cuspidali, in questi punti, si segano nel *foco straordinario* ($x = \varrho$, $y = 0$) della curva.

Da ciascuno dei punti ciclici si possono condurre alla curva, ancora, tre tangenti in punti al finito. Dei nove punti d'intersezione (fochi ordinarii della curva), quelli reali sono i tre punti E_1, E_2, E_3 dell'asse x.

La serie delle ovali di Cartesio confocali, delle curve, cioè, aventi gli stessi fochi reali e, quindi, anche gli stessi fochi immaginarii, è rappresentata da ciascuna delle equazioni A), B), D). Facendo variare il foco straordinario si hanno le diverse curve della serie.

Le curve reali della serie precedente si dividono in due sistemi: uno si ottiene facendo variare ϱ fra e_1 e $+\infty$, l'altro facendo variare ϱ fra $-\infty$ ed e_3. Scambiando il senso positivo dell'asse x i due sistemi di curve si scambiano fra loro. A valori di ϱ compresi fra e_3 ed e_1 corrispondono curve immaginarie.

Per un punto del piano passa una curva appartenente a ciascuno dei sistemi precedenti e queste due curve s'incontrano ad angolo retto. Due curve dello stesso sistema non hanno, quindi, punti reali in comune.

Per $\varrho = e_i$ ($i = 1, 2, 3$) la curva si riduce al cerchio C_i di equazione

$$(x - e_i)^2 + y^2 - R_i^2 = 0$$

contato due volte. I cerchi C_1 e C_3 sono reali; appartengono come curve limiti a ciascuno dei due sistemi di curve reali che compongono la serie confocale e s'incontrano, quindi, ad angolo retto. C_2 è immaginario.

Un'inversione rispetto a ciascuno dei cerchi C_i trasforma ciascuna delle curve della serie e, quindi, la serie in se stessa.

Ogni curva appartenente al sistema $\varrho > e_1$ è composta di due ovali distinte inverse una dell'altra rispetto al cerchio C_1 e, quindi, una interna, l'altra esterna allo stesso cerchio. Ciascuna di queste ovali incontra ortogonalmente il cerchio C_3; ha l'asse x per asse di simmetria ed è situata nella regione del piano in cui $x > -\frac{\varrho}{2}$. Proprietà analoghe valgono per le curve del sistema $\varrho < e_3$ e, per enunciarle, basta scambiare, negli enunciati precedenti, E_1 e C_1 con E_3 e C_3.

La serie di curve confocali formata dalle ovali di Cartesio è il doppio sistema di linee ortogonali che nella rappresentazione conforme determinata dalla funzione di variabile complessa

$$x' + iy' = P(x + iy),$$

P essendo la funzione ellittica di Weierstrass con invariante reale e positivo, corrisponde al doppio sistema ortogonale formato dalle rette $x = \text{cost}$, $y = \text{cost}$.

6. Intersezioni della curva con l'asse x. — Ci riferiremo, d'ora in poi, soltanto ad una curva del sistema $\varrho > e_1$. L'equazione da cui dipende la determinazione delle intersezioni di questa curva con l'asse x è un'equazione di quarto grado riducibile quando si suppongano note le quantità $\sqrt{\varrho - e_1}$. Queste intersezioni si possono ottenere, facilmente ed in conformità alle diverse proprietà metriche di definizione della curva stessa, cercando i punti dell'asse x che soddisfino alle condizioni

$$\sqrt{\varrho - e_2}\,(x - e_1) \pm \sqrt{\varrho - e_1}\,(x - e_2) = \pm (e_1 - e_2)\sqrt{\varrho - e_3}\,. \tag{11}$$

Chiamando x_1, x_2, x_3, x_4 i valori di x così determinati e supponendoli ordinati per ordine di grandezza decrescente, avremo

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \varrho + \sqrt{(\varrho - e_3)(\varrho - e_2)} + \sqrt{(\varrho - e_1)(\varrho - e_3)} + \sqrt{(\varrho - e_2)(\varrho - e_1)}\,,\\ x_2 &= \varrho + \sqrt{(\varrho - e_3)(\varrho - e_2)} - \sqrt{(\varrho - e_1)(\varrho - e_3)} - \sqrt{(\varrho - e_2)(\varrho - e_1)}\,,\\ x_3 &= \varrho - \sqrt{(\varrho - e_3)(\varrho - e_2)} + \sqrt{(\varrho - e_1)(\varrho - \varrho_3)} - \sqrt{(\varrho - e_2)(\varrho - e_1)}\,,\\ x_4 &= \varrho - \sqrt{(\varrho - e_3)(\varrho - e_2)} - \sqrt{(\varrho - e_1)(\varrho - e_3)} + \sqrt{(\varrho - e_2)(\varrho - e_1)}\,. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Da queste formole ricaviamo

$$x_1 - e_1 = (\sqrt{\varrho - e_1} + \sqrt{\varrho - e_2})(\sqrt{\varrho - e_1} + \sqrt{\varrho - e_3})\,,$$

$$x_2 - e_1 = (\sqrt{\varrho - e_1} - \sqrt{\varrho - e_2})(\sqrt{\varrho - e_1} - \sqrt{\varrho - e_3})\,,$$

e quindi

$$(x_1 - e_1)(x_2 - e_1) = R_1^2\,. \tag{13}$$

In modo analogo si mostrerebbe che

$$\left\{\begin{aligned} &(x_3 - e_1)(x_4 - e_1) = R_1^2\,;\\ &(x_1 - e_2)(x_3 - e_2) = R_2^2\,, \quad (x_2 - e_2)(x_4 - e_2) = R_2^2\,;\\ &(x_1 - e_3)(x_4 - e_3) = R_3^2\,, \quad (x_2 - e_3)(x_3 - e_3) = R_3^2 \end{aligned}\right. \tag{13'}$$

dalle quali si deduce che le due coppie di punti (x_1, x_2), (x_3, x_4) sono coppie di punti inversi rispetto a C_1, che i punti di ciascuna delle coppie (x_1, x_3), $(x_2 . x_4)$ sono inversi rispetto a C_2 e che quelli di ciascuna delle coppie (x_1, x_4), (x_2, x_3) sono inversi rispetto a C_3.

7. Le ovali di Cartesio come curve aplanetiche di rifrazione. — L'equazione dell'ovale di Cartesio, sotto una qualunque delle forme A), B), D), contiene simmetricamente e_1, e_2, e_3. Per conseguenza la totalità dei punti reali che costituiscono la detta curva contiene i punti reali dei diversi luoghi di punti rappresentati dalla diverse equazioni

$$\sqrt{\varrho - e_{i+2}}\, r_{i+1} \pm \sqrt{\varrho - e_{i+1}}\, r_{i+2} = \pm (e_{i+1} - e_{i+2})\sqrt{\varrho - e_i}\,, \tag{14}$$

$$i = 1, 2, 3\,.$$

Non a tutte le equazioni precedenti corrispondono, però, punti reali. Notando, infatti, che

$$\sqrt{\varrho - e_3} > \sqrt{\varrho - e_2} > \sqrt{\varrho - e_1}$$

per nessun punto reale può essere

$$\sqrt{\varrho - e_3}\, r_2 + \sqrt{\varrho - e_2}\, r_3 = (e_2 - e_3)\sqrt{\varrho - e_1}\,,$$

giacchè da essa ne verrebbe

$$\sqrt{\varrho - e_1}\,(r_2 + r_3) < \sqrt{\varrho - e_3}\, r_2 + \sqrt{\varrho - e_2}\, r_3 = (e_2 - e_3)\sqrt{\varrho - e_1}\,,$$

$$r_2 + r_3 < e_2 - e_3\,.$$

In modo analogo si dimostra che non possono essere soddisfatte da punti reali le equazioni

$$\sqrt{\varrho - e_1}\, r_2 - \sqrt{\varrho - e_2}\, r_1 = (e_1 - e_2)\sqrt{\varrho - e_3}\,,$$

$$\sqrt{\varrho - e_1}\, r_3 - \sqrt{\varrho - e_3}\, r_1 = (e_1 - e_3)\sqrt{\varrho - e_2}\,,$$

giacchè, dalla prima, discenderebbe

$$\sqrt{\varrho - e_2}\,(r_2 - r_1) > \sqrt{\varrho - e_1}\, r_2 - \sqrt{\varrho - e_2}\, r_1 = (e_1 - e_2)\sqrt{\varrho - e_3}\,,$$

$$r_2 - r_1 > e_1 - e_2\,,$$

e, dalla seconda,

$$\sqrt{\varrho - e_2}\,(r_3 - r_1) > \sqrt{\varrho - e_1}\, r_3 - \sqrt{\varrho - e_3}\, r_1 = (e_1 - e_3)\sqrt{\varrho - e_2}\,,$$

$$r_3 - r_1 > e_1 - e_3\,.$$

In corrispondenza ai due fochi E_1, E_2 possono, quindi, essere soddisfatte da punti reali soltanto le due equazioni

$$(14)\qquad \begin{cases} \sqrt{\varrho - e_2}\, r_1 + \sqrt{\varrho - e_1}\, r_2 = (e_1 - e_2)\sqrt{\varrho - e_3}\,, \\ \sqrt{\varrho - e_2}\, r_1 - \sqrt{\varrho - e_1}\, r_2 = (e_1 - e_2)\sqrt{\varrho - e_3}\,; \end{cases}$$

in corrispondenza ai due fochi E_1, E_2, possono essere soddisfatte soltanto le due relazioni

$$(14')\qquad \begin{cases} \sqrt{\varrho - e_3}\, r_1 + \sqrt{\varrho - e_1}\, r_3 = (e_1 - e_3)\sqrt{\varrho - e_2}\,, \\ \sqrt{\varrho - e_3}\, r_1 - \sqrt{\varrho - e_1}\, r_3 = (e_1 - e_3)\sqrt{\varrho - e_2} \end{cases}$$

e, corrispondentemente ai due fochi E_1, E_2, soltanto le due equazioni

$$(14'')\qquad \begin{cases} \sqrt{\varrho - e_2}\, r_3 - \sqrt{\varrho - e_3}\, r_2 = (e_2 - e_3)\sqrt{\varrho - e_1}\,, \\ \sqrt{\varrho - e_3}\, r_2 - \sqrt{\varrho - e_2}\, r_3 = (e_2 - e_3)\sqrt{\varrho - e_1}\,, \end{cases}$$

la prima equazione di ciascun gruppo essendo soddisfatta dai punti dall'ovale interna a C_1, la seconda dai punti dell'ovale esterna.

Rispetto all'ovale più grande, dei due fochi E_1, E_2, uno è immagine virtuale dell'altro; mentre, rispetto all'ovale più piccola nessuno di essi può essere considerato come immagine reale, o come immagine virtuale dell'altro. E, se O è un punto di questa ovale, il raggio rifratto di $E_1 O$ è il simmetrico, rispetto alla tangente alla curva in O, del raggio OE_2.

Quando si passi a considerare il comportamento ottico delle due ovali rispetto alla coppia di fochi E_3, E_1, ovvero E_3, E_2, bisogna considerare separatamente le due parti in cui ciascuna ovale è divisa dal cerchio C_3. Rispetto alle parti di queste ovali che sono esterne a C_3, i fochi E_3, E_1 si comportano, precisamente, come i fochi E_2, E_1. Rispetto alla parte dell'ovale più piccola, interna a C_3, E_1 è immagine reale di E_3. Invece, se O è un punto dell'ovale maggiore, interno a C_3, il raggio rifratto di $E_3 O$ è il simmetrico di OE_1, rispetto alla normale, in O, alla linea.

I due fochi E_3, E_2 si comportano allo stesso modo rispetto alle due ovali e, precisamente, nello stesso modo nel quale si comportano rispetto al cerchio C_1 di cui costituiscono una coppia di punti aplanetici. Solo è da osservare che, rispetto a C_1, oltre alla coppia ricordata, conformemente ad un teorema di Weierstrass, ve ne sono infinite altre disposte su due cerchi concentrici a C_1, uno interno e l'altro esterno a C_1 stesso. Per ciascuna delle parti di ciascuna delle ovali, esterna a C_3, E_2 è immagine virtuale di E_3. E, se, infine, O è un punto qualunque della curva, interno a C_3, il raggio rifratto di $E_3 O$ è il simmetrico di OE_2 rispetto alla normale alla curva in O.

8. Caso particolare in cui un foco è all'infinito. — Nel caso particolare accennato la curva aplanetica (ci limitiamo ancora alla considerazione di una sezione normale della superficie aplanetica corrispondente) rispetto al punto all'infinito P e ad un punto Q, al finito, è il luogo dei punti tali che la somma, o la differenza, delle distanze di un punto della curva da un certo piano fisso α e dal punto Q, moltiplicate per due costanti positive n_1, n_2, rispettivamente, sia costante. Scegliendo come asse x la retta condotta per Q normalmente ad α, chiamando con e l'ascissa di Q e spostando, se occorre, parallelamente a se stesso il piano α, quando l'origine delle coordinate si scelga in modo oppurtuno, l'equazione del luogo si può scrivere sotto la forma

$$\pm n_1\left(x - \frac{n_2^2}{n_1^2}e\right) + n_2\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 0, \tag{15}$$

n_1 essendo l'indice di rifrazione assoluta del mezzo in cui si trova il foco infinitamente lontano. Dall'equazione precedente risulta subito

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - 1} = e^2 \, . \quad \lambda = \frac{n_2}{n_1} , \tag{16}$$

la quale è una conica di eccentricità $\frac{1}{\lambda} = \frac{n_1}{n_2}$.

Lasciando fissi i fochi e facendo variare l'indice relativo di rifrazione $\frac{n_2}{n_1}$ dei due mezzi si ottiene la serie delle coniche a centro confocali.

Chimica vegetale. — *Sulla influenza di alcune sostanze organiche sullo sviluppo delle piante.* Nota II del Socio G. Ciamician e di C. Ravenna.

Nella nostra prima Nota su questo argomento (1) abbiamo descritto alcune esperienze dirette a mettere in rilievo l'influenza che alcune sostanze organiche esercitano sullo sviluppo delle piantine segnatamente di fagioli germogliati e cresciuti sul cotone idrofilo. Le prove fatte allora si limitarono al nitrile mandelico in comparazione coll'acido cianidrico e l'amigdalina e ad alcuni alcaloidi: anzitutto la nicotina ed inoltre la morfina, la stricnina e la caffeina. I risultati migliori si ebbero col nitrile mandelico e con la nicotina; peraltro anche queste esperienze non furono esaurienti perchè le coltivazioni vennero troncate prima che le piantine avessero raggiunta la maturità, volendo esaminare a tempo debito il loro contenuto in relazione alle sostanze somministrate. Appariva però necessario ripetere le prove con queste sostanze ed estenderle a molte altre per vedere le differenze di contegno che le piantine di fagioli presentavano ai diversi interventi chimici. Appariva pure opportuno non limitare le esperienze ai soli fagioli ma estenderle ad altre piante. A questo proposito vogliamo dire subito che i fagioli e massime quelli comuni dai semi screziati in rosso si mostrarono, fra le piante da noi esaminate, le più propizie a tali esperienze; il mais, le barbabietole e il tabacco sono, a parità di condizioni, assai meno sensibili alle sostanze da noi sperimentate; i lupini, se anche ne risentirono l'azione, non modificarono mai il loro abito.

Le sostanze sperimentate furono, oltre al citato nitrile mandelico, gli alcoli benzilico e salicilico (saligenina); gli acidi benzoico e salicilico allo stato di sali potassici; la vanillina, l'eugenolo e il tannino; gli acidi amidati alanina ed asparagina; l'acido urico e la xantina allo stato di sali potassici in comparazione con la caffeina; la piridina e la piperidina in comparazione

(1) Questi Rendiconti, vol. 26, I, pag. 3 (1917).