ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 5 maggio 1918.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra certe forme particolari dell'elemento lineare sferico.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. In una recente Memoria del prof. Calapso [1] è richiamata l'attenzione sopra una classe di superficie che hanno a comune colle superficie isoterme l'immagine sferica delle linee di curvatura e sono caratterizzate dalla proprietà che pei coefficienti E, G del loro ds^2, riferito alle linee di curvatura (u, v)

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

sussiste la relazione

$$G \pm E = a r^2, \tag{1}$$

dove a indica una costante, ed r rappresenta la distanza del punto (u, v) mobile sulla superficie da un punto fisso nello spazio [2].

Nella presente Nota vogliamo trovare tutti i modi nei quali una *sfera* può figurare come superficie della classe (1). Si vedrà che questo problema

[1] *Intorno agli inviluppi di sfere sulle cui superficie focali si corrispondono le linee di curvatura* (Annali di matematica, serie III, tomo XXVI (1917), pp. 151-190).

[2] Osservo che già in ricerche ormai antiche si presentarono classi di queste superficie, se anche la proprietà espressa dalla (1) non vi si trova esplicitamente avvertita. Così nella mia Memoria: *Nuove ricerche sulle superficie pseudosferiche* (Annali di matematica, 1896), per le superficie che sono ivi indicate col nome di Σ *paraboliche* ha luogo appunto la proprietà $G + E = a r^2$. Più recentemente nella Memoria inserita nel tomo XXIV (1915) le superficie studiate ai §§ 13, 15, ed ivi associate in *famiglie di Lamé*, appartengono ancora alla classe (1).

di determinare tutti i sistemi ortogonali (u, v) sulla sfera pei quali si verifica la (1), si connette al problema della deformazione delle quadriche rotonde, aventi un fuoco principale nel punto fisso F da cui è contata la distanza r, e i due problemi si equivalgono perfettamente.

Osserverò ancora di passaggio che ai sistemi ortogonali sferici del tipo (1) sono applicabili le trasformazioni di Ribaucour in geometria sferica e le trasformazioni delle deformate delle quadriche rotonde che ne derivano sono precisamente le così dette G_k, che furono risolute da Calapso nelle loro componenti elementari B_k. Più in generale questo avviene pei sistemi ortogonali della sfera che corrispondono ai sistemi coniugati permanenti delle quadriche *generali* nelle ricerche fondamentali di Calapso [1].

2. Per risolvere la questione proposta ricorriamo ad alcuni risultati la cui dimostrazione viene data in un lavoro che si sta ora pubblicando nelle Memorie di questa R. Accademia [2].

Si consideri una superficie S qualunque e la sua *polare reciproca* $\overline{S}$ rispetto ad una sfera il cui centro indichiamo con F. Alle linee di curvatura di S corrisponde sulla polare $\overline{S}$ quel sistema coniugato che si projetta da F sulla sfera in un sistema ortogonale, lo diciamo *il sistema coniugato d'apparenza ortogonale* (visto da F). Ora suppongasi che la S appartenga alla classe (1), e considerando dapprima il caso del segno inferiore, abbiasi

$$G - E = a r^2, \tag{2}$$

la distanza r essendo contata da F. La condizione necessaria e sufficiente perchè ciò avvenga è che sulla polare reciproca $\overline{S}$ il detto sistema coniugato, ortogonale apparente da F, sia *permanente* in una deformazione reale finita della $\overline{S}$ considerata come flessibile ed inestendibile. Si aggiunga che, ove la $\overline{S}$ si faccia rotolare sulla corrispondente deformata, il punto satellite F descrive una superficie isoterma [3].

Per l'altro caso, in cui vale nella (1) il segno superiore e si ha

$$G + E = a r^2, \tag{3}$$

sussiste ancora un risultato analogo. Ma in tal caso la deformazione della $\overline{S}$, in luogo di essere reale, è puramente immaginaria, vale a dire i corrispondenti valori dei coefficienti della seconda forma fondamentale nella deformata sono immaginarii puri: iD, iD'' $(iD' = 0)$. La proprietà può porsi nuova-

[1] Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo 16 (1902) e Annali di matematica tomo 19, ser. 3ª (1912).

[2] *Ricerche sulle congruenze di sfere e sul rotolamento di superficie applicabili* (ved. i §§ 54, 55 della Memoria).

[3] Cfr. la Nota: *Sulla generazione per rotolamento delle superficie isoterme* (questi Rendiconti, novembre 1915).

mente sotto forma reale ricorrendo al teorema di Darboux sui sistemi ciclici. Esiste infatti una tripla infinità di congruenze normali di circoli tracciati nei piani tangenti di $\bar{S}$ e pei quali alle linee di curvatura delle superficie ortogonali ai circoli corrisponde su $\bar{S}$ il detto sistema coniugato (u, v), che diremo per ciò un *sistema coniugato ciclico*.

Se ne conclude che la ricerca delle superficie S della classe (2) equivale a quelle delle superficie $\bar{S}$ (loro polari reciproche) che posseggono un sistema coniugato *permanente* d'apparenza ortogonale. Similmente la ricerca delle superficie S della classe (3) equivale a quella delle superficie $\bar{S}$ dotate di un sistema coniugato *ciclico* d'apparenza ortogonale.

3. Applichiamo queste osservazioni generali al caso in cui la superficie S sia una sfera. La polare reciproca $\bar{S}$ della sfera rispetto ad una sfera col centro F in un punto dello spazio è allora una quadrica rotonda Q avente in F un fuoco principale: precisamente Q è un paraboloide rotondo se F cade sulla sfera S, un ellissoide (allungato) se F è interno, un iperboloide (a due falde) quando F è esterno. Di più nel caso attuale *tutti* i sistemi coniugati di Q si cangiano sulla sfera S in sistemi ortogonali (e viceversa). Dunque: *per ottenere tutti i sistemi ortogonali sferici della classe* (2) *basta projettare dal fuoco* F *sulla sfera i sistemi coniugati permanenti della quadrica* Q.

Similmente i sistemi sferici della seconda classe (3) si hanno projettando i sistemi coniugati *ciclici* della quadrica Q sulla sfera [1].

Resta così dimostrato che in effetto la ricerca dei sistemi ortogonali sferici in discorso equivale al problema della deformazione delle quadriche rotonde.

È interessante osservare che se il fuoco F non cade sulla sfera, ogni ds'^2 sferico pel quale sussiste la (1) soddisfa *in doppio modo* a questa condizione. Poichè infatti se F′ è il coniugato armonico di F sul raggio OF ed r' indica la relativa distanza del punto (u, v) della sfera da F′, sussiste la relazione elementare $\frac{r}{r'} = \text{cost}$, e la (1) può anche scriversi

$$G \pm E = a' r'^2 \quad (a' \text{ costante}).$$

Ne segue che le due quadriche rotonde Q, Q′ polari reciproche della sfera S

[1] Si osservi che se, in particolare, F cade nel centro della sfera si ha $r = \text{cost}$ ed ai corrispondenti sistemi sferici si può dare la forma

$$ds'^2 = \text{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2$$

o l'altra

$$ds'^2 = \text{sen}^2\theta\, du^2 + \cos^2\theta\, dv^2,$$

ciò che riconduce a risultati ben noti.

rispetto a sfere coi centri in F, F′ si corrispondono in una tale omografia che i sistemi coniugati permanenti di Q si cangiano in quelli permanenti di Q′, e così pure quelli coniugati ciclici negli omologhi. Le due quadriche Q, Q′ sono dunque un ellissoide allungato ed un iperboloide a due falde *coniugati in deformazione*, secondo la trasformazione H di cui al cap. V, vol. III delle *Lezioni* (cfr. § 72, ivi).

4. Vogliamo ora trovare effettivamente le forme:

$$ds'^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2$$

dell'elemento lineare sferico soddisfacente alla (2) deducendole, come sopra si è spiegato, dalle trasformazioni D_m di Darboux delle superficie a curvatura media costante. Un tale sistema (u, v) dà altresì l'immagine di Gauss delle linee di curvatura di un'altra superficie isoterma legata alla superficie a curvatura media costante dalla trasformazione T_m associata alla D_m di Darboux [1].

Se il ds^2 della superficie a curvatura media costante H si scrive

$$ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2),$$

per le curvature principali $\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}$ si può prendere

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\mathrm{H} + e^{-2\theta}}{2}, \quad \frac{1}{r_2} = \frac{\mathrm{H} - e^{-2\theta}}{2},$$

mentre θ è una soluzione dell'equazione a derivate parziali del secondo ordine

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \frac{1}{4}(\mathrm{H}^2 e^{2\theta} - e^{-2\theta}) = 0.$$

Una trasformazione D_m della superficie S a curvatura media costante è definita dalle funzioni trasformatrici λ, μ, w, φ assoggettate a soddisfare al sistema lineare omogeneo:

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = m(\mathrm{H}e^{\theta} + e^{-\theta})\,\varphi - \left(\dfrac{\mathrm{H}e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} + 2me^{\theta}\right) w - \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\mu, \\ \qquad \dfrac{\partial\mu}{\partial u} = \dfrac{\partial\theta}{\partial v}\lambda, \quad \dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{\mathrm{H}e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}\lambda, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = e^{\theta}\lambda \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\mu, \quad \dfrac{\partial\mu}{\partial v} = m(\mathrm{H}e^{\theta} - e^{-\theta})\,\varphi - \left(\dfrac{\mathrm{H}e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} + 2me^{\theta}\right) w - \dfrac{\partial\theta}{\partial u}\lambda, \\ \qquad \dfrac{\partial w}{\partial v} = \dfrac{\mathrm{H}e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}\mu, \quad \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = e^{\theta}\mu \end{cases}$$

[1] Cfr. la Memoria: *Complementi alle ricerche sulle superficie isoterme* [Annali di mat., ser. 3ª, tomo XII (1905)] e la Nota in questi Rendiconti già citata al n. 2.

ed all'equazione quadratica accessoria

$$(A^*) \qquad \lambda^2 + \mu^2 = 2m\mathrm{H}\varphi^2 - 4m\varphi w - w^2 ,$$

della quale basta tener conto ai limiti.

La superficie Σ trasformata della S a curvatura media costante H, per la trasformazione T_m associata alla D_m, ha l'elemento lineare

$$\overline{ds}^2 = \frac{e^{2\theta}}{\varphi^2}(du^2 + dv^2)$$

e le curvature principali

$$\frac{1}{\varrho_1} = w - \frac{\mathrm{H} + e^{-2\theta}}{2}\varphi \quad , \quad \frac{1}{\varrho_2} = w - \frac{\mathrm{H} - e^{-2\theta}}{2}\varphi ,$$

onde per il ds'^2 della sua immagine sferica abbiamo

$$ds'^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2$$

con

$$(4) \qquad \mathrm{E} = \frac{\left(e^{\theta} w - \frac{\mathrm{H}e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}\varphi\right)^2}{\varphi^2} \quad , \quad \mathrm{G} = \frac{\left(e^{\theta} w - \frac{\mathrm{H}e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}\varphi\right)^2}{\varphi^2} ,$$

e per ciò

$$(5) \qquad \mathrm{G} - \mathrm{E} = \mathrm{H} - 2\frac{w}{\varphi} .$$

5. Andiamo ora a verificare che il secondo membro di questa è in effetto proporzionale, per un fattore costante a, al quadrato r^2 della distanza del punto (u, v) della sfera a un punto fisso nello spazio. Denotando con X, Y, Z le coordinate del punto (u, v) della sfera e prendendo il punto fisso nel punto $(0, 0, c)$ dell'asse Oz abbiamo

$$(6) \qquad r^2 = \mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + (\mathrm{Z} - c)^2 = c^2 + 1 - 2c\mathrm{Z}$$

e resta da provarsi che possiamo determinare le costanti a, c per modo che si abbia

$$(7) \qquad \mathrm{H} - 2\frac{w}{\varphi} = a(c^2 + 1) - 2ac\mathrm{Z} .$$

Per questo possiamo servirci del risultato ottenuto al § 6 dei citati *Complementi* colla formola

$$(8) \qquad \mathrm{Z} = \frac{1}{\sqrt{2m(2m + \mathrm{H})}}\left(\frac{w}{\varphi} + 2m\right) \text{ (1)},$$

(1) Si avverte che per la realità della trasformazione deve essere $2m(2m + \mathrm{H}) > 0$.

e dalla (7) abbiamo per determinare a, c le due equazioni

$$a(c^2+1)=4m+\mathrm{H}$$
$$ac=\sqrt{2m(2m+\mathrm{H})}\,,$$

indi per c l'equazione quadratica

$$c^2-\frac{4m+\mathrm{H}}{\sqrt{2m(2m+\mathrm{H})}}\,c+1=0\,.$$

Le due radici sono

$$c_1=\sqrt{\frac{2m+\mathrm{H}}{2m}}\quad,\quad c_2=\sqrt{\frac{2m}{2m+\mathrm{H}}}\,,$$

coi corrispondenti valori

$$a_1=2m\quad,\quad a_2=2m+\mathrm{H}$$

pel moltiplicatore a. Come si vede i due punti $(0\,,0\,,c_1)$, $(0\,,0\,,c_2)$ sono coniugati armonici rispetto alla sfera, conformemente alle osservazioni del n. 3; essi coincidono nel punto $(0\,,0\,,1)$ della sfera quando la superficie S è ad area minima $(\mathrm{H}=0)$, e la quadrica Q diventa un paraboloide rotondo.

6. Senza invocare la formola (8) sulla quale si è fondata la verifica, possiamo anche stabilirla direttamente e confermare in pari tempo che l'elemento lineare dato dalle (4) appartiene alla sfera unitaria. Così resterà nuovamente stabilito che sono questi gli elementi lineari sferici soddisfacenti alla condizione (2). Poniamo per un momento

$$\Phi=\frac{w}{\varphi} \tag{9}$$

e calcoliamo i due parametri differenziali $\Delta_1\Phi$, $\Delta_2\Phi$ rispetto al ds^2 dato dalle (4). Derivando la (9), con riguardo alle (A), abbiamo

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}=\frac{(\mathrm{H}e^{\theta}-e^{-\theta})\,\varphi-2e^{\theta}w}{2\varphi^2}\,\lambda\quad,\quad\frac{\partial\Phi}{\partial v}=\frac{(\mathrm{H}e^{\theta}+e^{-\theta})\,\varphi-2e^{\theta}w}{2\varphi^2}\,\mu\,, \tag{10}$$

e per ciò

$$\Delta_1\Phi=\frac{1}{\mathrm{E}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2+\frac{1}{\mathrm{G}}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2=\frac{\lambda^2+\mu^2}{\varphi^2}\,,$$

indi a causa della (A*)

$$\Delta_1\Phi=2m\mathrm{H}-4m\Phi-\Phi^2=2m(2m+\mathrm{H})-(\Phi+2m)^2\,. \tag{11}$$

Ora calcoliamo

$$\Delta_2\Phi=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{E}}}\,\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}}\,\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)\right\},$$

che per le (10) e per le (4) diventa

$$(12)\qquad \Delta_2\Phi = \frac{2}{(\mathrm{H}e^{\theta} - e^{-\theta} - 2e^{\theta}\Phi)(\mathrm{H}e^{\theta} + e^{-\theta} - 2e^{\theta}\Phi)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{(\mathrm{H}e^{\theta} + e^{-\theta})\varphi - 2e^{\theta}w}{\varphi^2}\lambda\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{(\mathrm{H}e^{\theta} + e^{-\theta})\varphi - 2e^{\theta}w}{\varphi^2}\mu\right]\right\}.$$

Calcolando l'espressione

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{(\mathrm{H}e^{\theta} + e^{-\theta})\varphi - 2e^{\theta}w}{\varphi^2}\lambda\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{(\mathrm{H}e^{\theta} - e^{-\theta})\varphi - 2e^{\theta}w}{\varphi^2}\mu\right]$$

mediante le (A), si trova dapprima:

$$\Omega = \left\{(\mathrm{H}e^{\theta} + e^{-\theta}) - 2e^{\theta}\Phi\right\}\cdot\left\{m(\mathrm{H}e^{\theta} + e^{-\theta}) - \left(\frac{\mathrm{H}e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} + 2me^{\theta}\right)\Phi\right\} +$$

$$+ \left\{(\mathrm{H}e^{\theta} - e^{-\theta}) - 2e^{\theta}\Phi\right\}\cdot\left\{m(\mathrm{H}e^{\theta} + e^{-\theta}) - \left(\frac{\mathrm{H}e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} + 2me^{\theta}\right)\Phi\right\} -$$

$$- 2e^{2\theta}(\mathrm{H} - 2\Phi)\frac{\lambda^2 + \mu^2}{\varphi^2},$$

e siccome per la (A*)

$$\frac{\lambda^2 + \mu^2}{\varphi^2} = 2m\mathrm{H} - 4m\Phi - \Phi^2,$$

sostituendo ed ordinando otteniamo

$$\Omega = -4e^{2\theta}\Phi^3 + 4e^{2\theta}(\mathrm{H} - 2m)\Phi^2 + (e^{-2\theta} - \mathrm{H}^2 e^{2\theta} + 8m\mathrm{H}e^{2\theta})\Phi +$$
$$+ 2m(e^{-2\theta} - \mathrm{H}^2 e^{2\theta}),$$

che si risolve nel prodotto dei due fattori

$$\Omega = -(\Phi + 2m)(4e^{2\theta}\Phi^2 - 4e^{2\theta}\mathrm{H}\Phi + \mathrm{H}^2 e^{2\theta} - e^{2\theta}),$$

il secondo dei quali è precisamente il denominatore

$$(\mathrm{H}e^{\theta} - e^{-\theta} - 2e^{\theta}\Phi)(\mathrm{H}e^{\theta} + e^{-\theta} - 2e^{\theta}\Phi)$$

nella (12). Otteniamo quindi, insieme alla (11), l'altra formola

$$\Delta_2\Phi = -2(\Phi + 2m),$$

da cui

$$-\frac{\Delta_2\Phi}{\Delta_1\Phi} = \frac{2(\Phi + 2m)}{(\Phi + 2m)^2 - 2m(2m + \mathrm{H})},$$

e in conseguenza

$$-\int\frac{\Delta_2\Phi}{\Delta_1\Phi}d\Phi = -\log\left\{2m(2m + \mathrm{H}) - (\Phi + 2m)^2\right\}.$$

Dal teorema di Lie sui sistemi isotermi (*Lezioni*, vol. I, § 47) segue che la espressione

$$(13)\qquad d\Psi = \frac{(\mathrm{H}e^{\theta} - e^{-\theta})\,\varphi - 2e^{\theta}\,w}{2\varphi^2}\,\frac{\mu\,du}{2m(2m+\mathrm{H}) - (\Phi+2m)^2} - \frac{(\mathrm{H}e^{\theta} + e^{-\theta})\,\varphi - 2e^{\theta}\,w}{2\varphi^2}\,\frac{\lambda\,dv}{2m(2m+\mathrm{H}) - (\Phi+2m)^2}$$

è un differenziale esatto. Ed ora se il ds^2 dato dalle (4) si riferisce alle linee $\Phi = \text{cost}$ ed alle loro trajettorie ortogonali $\Psi = \text{cost}$, siccome si ha per la (11)

$$\Delta_1 \Phi = 2m(2m+\mathrm{H}) - (\Phi+2m)^2$$

e per le (4) e per le (13)

$$\Delta_1 \Psi = \frac{\lambda^2+\mu^2}{\varphi^2}\cdot\frac{1}{(\Delta_1\Phi)^2} = \frac{1}{\Delta_1\Phi}\,,$$

essendo inoltre

$$\nabla(\Phi\,,\Psi) = 0\,,$$

risulterà (*Lezioni*, vol. I, § 44):

$$ds'^2 = \frac{d\Phi^2}{\Delta_1\Phi} + \Delta_1\Phi\,.\,d\Psi^2\,,$$

cioè

$$ds'^2 = \frac{d\Phi^2}{2m(2m+\mathrm{H})\,(\Phi+2m)^2} + [2m(2m+\mathrm{H}) - (\Phi+2m)^2]\,d\Psi^2\,.$$

Pongasi ora

$$(14)\qquad \begin{aligned} \Phi + 2m &= \sqrt{2m(2m+\mathrm{H})}\,.\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ \Psi\sqrt{2m(2m+\mathrm{H})} &= \beta\,, \end{aligned}$$

e il ds'^2 sarà ridotto all'ordinaria forma dell'elemento lineare della sfera unitaria

$$ds'^2 = d\alpha^2 + \mathrm{sen}^2\alpha\,d\beta^2\,,$$

riferito a coordinate geografiche $\alpha\,,\beta$. Ed avendosi qui $\mathrm{Z} = \mathrm{sen}\,\alpha$, la formola (14) si riduce così alla (8), la quale resta per tal modo nuovamente stabilita.

7. Trattiamo da ultimo di un problema analogo a quello del n. 1 quando ai coefficienti E, G dell'elemento lineare sferico s'imponga l'altra condizione

$$(15)\qquad \mathrm{G} \pm \mathrm{E} = az^2\,,$$

dove ora con z indichiamo la distanza del punto $(u\,,v)$ della sfera Σ *da un*

piano fisso π. Una semplice considerazione di metrica non-euclidea riconduce subito il nuovo problema alla teoria delle superficie a curvatura costante. Prendasi infatti il piano π come piano limite di una metrica (iperbolica) di Poincaré [1] definita da

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}.$$

In questa metrica Σ rappresenta ancora una sfera; questa però è a centro proprio se π non incontra Σ, un'orisfera quando π è tangente a Σ, in fine una sfera a centro ideale se π attraversa Σ, e a seconda dei tre casi la curvatura assoluta di Σ in metrica iperbolica è positiva, nulla o negativa. Ma pel ds^2 di Σ in questa metrica

$$ds^2 = e\,du^2 + g\,dv^2$$

la (15) si muta manifestamente nell'altra

$$g \pm e = \text{cost},$$

che corrisponde a dare al ds^2 l'una o l'altra delle due forme:

$$ds^2 = \cos^2\theta\,du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,dv^2$$
$$ds^2 = \cosh^2\theta\,du^2 + \operatorname{senh}^2\theta\,dv^2.$$

Il problema equivale adunque appunto alla ricerca delle superficie a curvatura costante negativa, o positiva, e nel caso particolare di π tangente a Σ si risolve coll'integrazione dell'equazione

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} \mp \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} = 0.$$

[1] Cfr. le mie *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, § 187 segg.