ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Ottica. — *Sulla maniera di stabilire le formole fondamentali dell'ordinaria teoria della diffrazione*. Nota del Corrispondente O. TEDONE.

1. Questa Nota si ricollega naturalmente all'altra avente per titolo: *Sul principio di Huygens in un campo elettromagnetico*, pubblicata in questi stessi Rendiconti (1) e ne costituisce, si può dire, il completo sviluppo.

Il principio di Huygens è stato introdotto nell'ottica, principalmente, con lo scopo di giustificare, con sufficiente rapidità e generalità, le leggi fondamentali dell'ottica geometrica, nell'ipotesi ondulatoria, e di ottenere i fondamenti per una trattazione approssimata dei fenomeni di diffrazione. Com'è noto, questo principio, di origine intuitiva, è stato, poi, sostituito dal Kirchhoff, per raggiungere sempre gli intenti sopra indicati, con la formola che porta il suo nome e che egli dedusse dall'equazione dei potenziali ritardati alla quale, qualunque sia la teoria ottica che si adotta, soddisfano le componenti del vettore *luce*. Noi pensiamo che i risultati ottenuti partendo dal principio di Huygens, o dalla formola di Kirchhoff, restino meglio inquadrati nella teoria elettromagnetica della luce, o, almeno, che l'esposizione delle varie quistioni dell'ottica, dal punto di vista di questa teoria, raggiungano una maggiore uniformità, sostituendo alla formola di Kirchhoff le formole riportate e ridimostrate nella Nota citata e che stanno, con le equazioni di Maxwell del campo elettromagnetico, nella stessa relazione in cui la formola di Kirchhoff sta con l'equazione dei potenziali ritardati. Ed è ciò che, precisamente, ci proponiamo di fare nella Nota seguente.

2. CENTRO DI SCUOTIMENTO ELETTROMAGNETICO. — Supporremo che i fenomeni elettromagnetici avvengano in un dielettrico omogeneo ed isotropo (in particolare, nell'aria, o nel vuoto) ed indicheremo con ε e μ la costante dielettrica e la permeabilità magnetica di esso. Se, inoltre, indichiamo, come al solito, con c la velocità della luce nel vuoto, con $C=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ la velocità della luce nel nostro dielettrico e con $\mathfrak{p}$ un vettore funzione dell'argomento $\tau-\frac{r_0}{C}$, τ essendo il valore del tempo ed r_0 la distanza di un punto fisso $A_0\equiv(x_0\,,y_0\,,z_0)$ ad un punto variabile $(\xi\,,\eta\,,\zeta)$, i valori del vettore forza elettrica $\mathfrak{E}_0$ e di quello forza magnetica $\mathfrak{H}_0$, prodotti nel

(1) Vol. XXVI, ser. 5ª, seduta 4 marzo 1917.

punto (ξ, η, ζ) da un centro di scuotimento situato in A_0, potranno essere rappresentati dalle formole

$$(1)\qquad \mathfrak{E}_0 = \mathrm{rot}^2 \frac{\mathfrak{p}}{r_0} = -\Delta^2 \frac{\mathfrak{p}}{r_0} + \mathrm{grad\,div} \frac{\mathfrak{p}}{r_0}\ ,\quad \mathfrak{H}_0 = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\ \mathrm{rot} \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{p}}{r_0}$$

nelle quali, com'è chiaro, le operazioni rot, Δ^2 ecc. devono esser fatte rispetto alle variabili ξ, η, ζ. Un campo elettromagnetico come il precedente si attribuisce alle vibrazioni di un, così detto, *dipolo* di cui $\mathfrak{p}$ rappresenta il momento.

Se indichiamo con $\mathfrak{p}'$ e $\mathfrak{p}''$ le derivate prima e seconda di $\mathfrak{p}$ rispetto all'argemento $\tau - \frac{r_0}{C}$, possiamo porre le (1) anche sotto la forma

$$(1')\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{E}_0 &= \frac{2}{r_0^3}\left(\mathfrak{p} + \frac{r_0}{C}\mathfrak{p}'\right) + \frac{1}{r_0^3}\mathfrak{r}_0\wedge\left[\mathfrak{r}_0\wedge\left(3\mathfrak{p} + 3\frac{r_0}{C}\mathfrak{p}' + \frac{r_0^2}{C^2}\mathfrak{p}''\right)\right] = \\ &= -\frac{1}{r_0^3}\left(\mathfrak{p} + \frac{r_0}{C}\mathfrak{p}' + \frac{r_0^2}{C^2}\mathfrak{p}''\right) + \\ &\quad + \frac{1}{r_0^3}\mathfrak{r}_0\left[\mathfrak{r}_0\times\left(3\mathfrak{p} + 3\frac{r_0}{C}\mathfrak{p}' + \frac{r_0^2}{C^2}\mathfrak{p}''\right)\right], \\ \mathfrak{H}_0 &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{1}{r_0^3}\mathfrak{r}_0\wedge\left(\frac{r_0}{C}\mathfrak{p}' + \frac{r_0^2}{C^2}\mathfrak{p}''\right) \end{aligned}\right.$$

in cui $\mathfrak{r}_0$ sta a rappresentare il vettore unitario di componenti

$$\frac{\partial r_0}{\partial \xi}, \frac{\partial r_0}{\partial \eta}, \frac{\partial r_0}{\partial \zeta}.$$

3. Centro luminoso. — Un centro di scuotimento elettromagnetico si dirà un centro luminoso quando può comunicare al mezzo circostante vibrazioni di lunghezza d'onda così piccola da potersi considerare praticamente come infinitamente piccola, come accade per le lunghezze d'onda corrispondenti alle varie radiazioni luminose, e consideriamo il centro di scuotimento solo in quanto emette queste vibrazioni. Ora, se le (1), o (1'), rappresentano una vibrazione armonica, il vettore $\mathfrak{p}$ è proporzionale a

$$\cos\frac{2\pi}{T}\left(\tau - \frac{r_0}{C} + T\delta\right) = \cos 2\pi\left(\frac{\tau}{T} - \frac{r_0}{\lambda} + \delta\right)$$

il fattore di proporzionalità essendo un vettore finito e costante, T indicando il periodo e λ la lunghezza d'onda della vibrazione considerata. Ne viene che, in questo caso, i termini delle (1') che contengono $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}', \mathfrak{p}''$ a fattori, stanno fra loro come

$$1\ ,\quad 2\pi\frac{r_0}{\lambda}\ ,\quad 4\pi^2\frac{r_0^2}{\lambda^2}\ ,$$

per cui, se r_0 è finito e λ, come s' è detto, infinitamente piccola, i termini prevalenti in (1') sono quelli che contengono $\mathfrak{p}''$ e possiamo, perciò, sostituire le (1') con le

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{E}_0 = \dfrac{1}{r_0 C^2}\, \mathfrak{r}_0 \wedge (\mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{p}'') = \dfrac{1}{r_0 C^2}[-\mathfrak{p}'' + \mathfrak{r}_0(\mathfrak{r}_0 \times \mathfrak{p}'')]\,, \\ \mathfrak{H}_0 = -\dfrac{1}{r_0 C^2}\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}\, \mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{p}''. \end{cases}$$

Queste formole rappresenteranno, quindi, il centro luminoso A_0, e, da esse, discende

$$(3)\qquad \mathfrak{E}_0 = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, \mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{H}_0 \quad , \quad \mathfrak{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{E}_0 .$$

4. Principio di Huygens in un campo elettromagnetico. — Riportiamo qui la dimostrazione delle formole che rappresentano il principio di Huygens in un campo elettromagnetico, data nella Nota citata, per apportarvi qualche modificazione che può avere importanza espositiva. Si abbia, dunque, nel dielettrico di cui abbiamo parlato in principio, un campo elettromagnetico ed indichiamo con $\mathfrak{E}(\xi, \eta, \zeta, \tau)$, $\mathfrak{H}(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ i due vettori, forza elettrica e forza magnetica, che caratterizzano il campo. Consideriamo in esso una regione S limitata da una superficie σ regolare e dentro alla quale i due vettori $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ sieno finiti e regolari. Supponiamo, dapprima, che la regione S sia finita; sia $A \equiv (x, y, z)$ un punto interno a questa regione ed indichiamo con r la distanza di A da un altro punto variabile di coordinate ξ, η, ζ. Se racchiudiamo, allora, A con una superficie α interna ad S che potremo sempre supporre sia una sfera col centro in A, chiamando S' la regione compresa fra σ ed α, potremo scrivere, come nella Nota più volte citata, le due relazioni

$$\int_{\sigma+\alpha}\left[\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{C}\right)\wedge \mathfrak{n}\right]\frac{d\sigma}{r} =$$
$$= -\operatorname{rot}\int_{S'}\frac{dS}{r}\,\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{C}\right) - \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{S'}\frac{dS}{r}\,\mathfrak{H}\left(t-\frac{r}{C}\right),$$

$$\int_{\sigma+\alpha}\left[\mathfrak{H}\left(t-\frac{r}{C}\right)\wedge \mathfrak{n}\right]\frac{d\sigma}{r} =$$
$$= -\operatorname{rot}\int_{S'}\frac{dS}{r}\,\mathfrak{H}\left(t-\frac{r}{C}\right) + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{S'}\frac{dS}{r}\,\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{C}\right).$$

In queste formole i vettori $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ sono quelli che definiscono il campo elettromagnetico in cui, al posto di τ, compare l' unico parametro $t - \dfrac{r}{C}$ che abbiamo messo in evidenza, t essendo un valore fissato del tempo; $\mathfrak{n}$ è un vettore unitario normale a σ ed α, diretto verso l'interno di S'; e l'operazione rot s'intende, naturalmente, eseguita sulle variabili x, y, z. Se, ora, come nella Nota citata, eseguiamo sulla prima delle relazioni precedenti, l'operazione rot, sulla seconda l'operazione $\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}$ e sottragghiamo, poi, la prima dalla seconda, troviamo

$$-\operatorname{rot}\int_{\sigma+\alpha}\left[\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{C}\right)\wedge\mathfrak{n}\right]\frac{d\sigma}{r}+\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\sigma+\alpha}\left[\mathfrak{H}\left(t-\frac{r}{C}\right)\wedge\mathfrak{n}\right]\frac{d\sigma}{r}=$$
$$=\left(\frac{1}{C^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta^2\right)\int_{S'}\frac{dS}{r}\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{C}\right)+\operatorname{grad}\operatorname{div}\int_{S'}\frac{dS}{r}\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{C}\right).$$

E, se, come supponiamo, non esistono all'interno di S masse elettriche, il secondo membro si riduce a

$$\operatorname{grad}\int_{\sigma+\alpha}\frac{d\sigma}{r}\left[\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{C}\right)\times\mathfrak{n}\right]$$

ed abbiamo

$$-\operatorname{rot}\int_{\sigma+\alpha}\left[\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{C}\right)\wedge\mathfrak{n}\right]\frac{d\sigma}{r}+\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\sigma+\alpha}\left[\mathfrak{H}\left(t-\frac{r}{C}\right)\wedge\mathfrak{n}\right]\frac{d\sigma}{r}-$$
$$-\operatorname{grad}\int_{\sigma+\alpha}\left[\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{C}\right)\times\mathfrak{n}\right]\frac{d\sigma}{r}=0.$$

Vogliamo, ora, in questa formola, far tendere a zero il raggio della sfera α. Si noti, perciò, che, indicando con $\mathfrak{r}$ il vettore unitario di componenti $\frac{\partial r}{\partial\xi}, \frac{\partial r}{\partial\eta}, \frac{\partial r}{\partial\zeta}$, sulla superficie sferica α è $\mathfrak{n}=\mathfrak{r}$; e che, volendo cercare il limite dell'insieme dei termini che, nel primo membro dell'equazione precedente, contengono integrali estesi alla sfera α quando il suo raggio tende a zero, basterà considerare soltanto quelle parti degli integrali stessi che compaiono nel primo e terzo termine e che si ottengono eseguendo le operazioni rot e grad sul solo fattore $\frac{1}{r}$, le altre parti avendo per limite zero. I termini da considerare sono, quindi,

$$\int_\alpha[(\mathfrak{E}\wedge\mathfrak{r})\wedge\mathfrak{r}]\frac{d\sigma}{r^2}-\int_\alpha\mathfrak{r}(\mathfrak{E}\times\mathfrak{n})\frac{d\sigma}{r^2}=-\int_\alpha\mathfrak{E}\frac{d\sigma}{r^2}$$

il vettore $\mathfrak{E}$, in questa equazione, dovendosi sempre ritenere funzione delle variabili d'integrazione ξ, η, ζ e di $t-\frac{r}{C}$. Ed, al tendere a zero del raggio di α, essi tendono a

$$-4\pi\mathfrak{E}(x, y, z, t).$$

Tenendo conto della formola analoga in $\mathfrak{H}$ che si può ottenere dalla precedente scambiando i due vettori $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ fra loro ed ε, μ con $-\mu, -\varepsilon$, si potranno scrivere le due seguenti formole

$$
(4)\quad \begin{cases}
4\pi\mathfrak{E}(x, y, z, t) = -\operatorname{rot}\int_\sigma\left[\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{C}\right)\wedge\mathrm{n}\right]\frac{d\sigma}{r}+ \\
\quad +\frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma\left[\mathfrak{H}\left(t-\frac{r}{c}\right)\wedge\mathrm{n}\right]\frac{d\sigma}{r}-\operatorname{grad}\int_\sigma\left[\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{C}\right)\times\mathrm{n}\right]\frac{d\sigma}{r}, \\
4\pi\mathfrak{H}(x, y, z, t) = -\operatorname{rot}\int_\sigma\left[\mathfrak{H}\left(t-\frac{r}{C}\right)\wedge\mathrm{n}\right]\frac{d\sigma}{r}- \\
\quad -\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma\left[\mathfrak{E}\left(t-\frac{r}{C}\right)\wedge\mathrm{n}\right]\frac{d\sigma}{r}-\operatorname{grad}\int_\sigma\left[\mathfrak{H}\left(t-\frac{r}{C}\right)\times\mathrm{n}\right]\frac{d\sigma}{r}.
\end{cases}
$$

Ad esse si può dare anche la forma seguente

$$
(4')\quad \begin{cases}
4\pi\mathfrak{E}(x, y, z, t) = \int_\sigma\left\{\mathrm{r}\wedge\left[\mathrm{n}\wedge\left(\frac{r}{C}\mathfrak{E}'+\mathfrak{E}\right)\right]-\right. \\
\quad \left.-\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{r}{C}\mathrm{n}\wedge\mathfrak{H}'-\mathrm{r}\left[\mathrm{n}\times\left(\frac{r}{C}\mathfrak{E}'+\mathfrak{E}\right)\right]\right\}_{\tau=t-\frac{r}{C}}\frac{d\sigma}{r^2}, \\
4\pi\mathfrak{H}(x, y, z, t) = \int_\sigma\left\{\mathrm{r}\wedge\left[\mathrm{n}\wedge\left(\frac{r}{C}\mathfrak{H}'+\mathfrak{H}\right)\right]+\right. \\
\quad \left.+\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{r}{C}\mathrm{n}\wedge\mathfrak{E}'-\mathrm{r}\left[\mathrm{n}\times\left(\frac{r}{C}\mathfrak{H}'+\mathfrak{H}\right)\right]\right\}_{\tau=t-\frac{r}{C}}\frac{d\sigma}{r^2}
\end{cases}
$$

nelle quali gli accenti su $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ indicano derivate rispetto a τ.

Le (4) e (4′) che sono dimostrate nel caso in cui S è finita, valgono anche nel caso in cui S si estenda all'infinito e sia limitata al finito da una superficie σ chiusa ed anche nel caso in cui σ si estenda indefinitamente se il campo elettromagnetico esiste solo in una regione finita dello spazio, o, più generalmente, se $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ si annullano all'infinito di ordine superiore ad $\frac{1}{r}$ e gli integrali che compaiono nelle nostre formole conservano un significato. Di ciò ci si convince facilmente con i soliti procedimenti.

Se all'insieme dei valori di $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ e delle derivate prime di questi vettori, rispetto al tempo, in un punto, diamo il nome di *condizioni elettromagnetiche* in questo punto, possiamo dire, a causa delle (4), o (4′), che le condizioni elettromagnetiche in un punto A, interno ad una regione S limitata da una superficie σ, al tempo t, sono completamente determinate dalle condizioni elettromagnetiche nei varii elementi di σ agli istanti antecedenti $t-\frac{r}{C}$, r essendo la distanza di A dall'elemento variabile della superficie.

Se i due vettori $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ continuano ad essere regolari in S, ma il punto A è esterno ad S, i secondi membri delle (4) o (4′), sono eguali a zero. E questa osservazione, insieme alle (4), o (4′) stesse, mostra che, se $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ sono regolari in tutto lo spazio per ogni valore del tempo da $-\infty$ a t, $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ non possono avere che il valore zero in tutto lo spazio e per tutto l'intervallo di tempo considerato.

5. Complementi ai risultati precedenti. — Crediamo utile aggiungere ai risultati precedenti le seguenti osservazioni per quanto esse possano considerarsi, in parte, estranei allo scopo particolare che ci siamo proposti di raggiungere.

Supponiamo che il campo elettromagnetico sia noto all'istante $\tau = 0$ e supponiamo, per maggiore semplicità, che questo campo sia indefinito. Vuol dire che all'istante $\tau = 0$ sono noti i due vettori $\mathfrak{E}(\xi, \eta, \zeta, 0)$, $\mathfrak{H}(\xi, \eta, \zeta, 0)$ in tutto lo spazio. Allora il campo stesso è determinato in tutto lo spazio ad ogni istante t successivo all'istante iniziale e le formole che lo determinano si possono ottenere subito dalle (4′). Se supponiamo, infatti, che σ si riduca, intanto, ad una sfera di centro A, su σ è $\mathfrak{n} = -\mathfrak{r}$ e la prima delle (4′), p. es., diventa

$$4\pi\mathfrak{E}(x, y, z, t) = \int_\sigma \left\{ \frac{r}{C}\mathfrak{E}' + \mathfrak{E} + \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{r}{C}\mathfrak{r}\wedge\mathfrak{H}' \right\}_{\tau = t - \frac{r}{C}} \frac{d\sigma}{r}.$$

Basta ora supporre che il raggio di questa sfera sia variabile ed eguale a Ct perchè la quistione propostaci sia completamente risolta dalla formola precedente e dalla analoga in $\mathfrak{H}$.

Dalle formole (4), o (4′), si ricavano subito altre formole che valgono nel caso in cui $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ hanno la forma

$$\mathfrak{E}(\xi, \eta, \zeta, \tau) = e^{\sqrt{-1}\,k\tau}\mathfrak{A}(\xi, \eta, \zeta) \quad , \quad \mathfrak{H}(\xi, \eta, \zeta, \tau) = e^{\sqrt{-1}\,k\tau}\mathfrak{B}(\xi, \eta, \zeta),$$

k essendo una determinata costante, e, quindi, il campo elettromagnetico è quello determinato dal propagarsi di una sola vibrazione armonica. Sostituendo, infatti, p. es., nella prima delle (4), per $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$, i valori precedenti, e separando, poi, la parte reale dalla parte immaginaria, si ottengono le due relazioni

$$\begin{aligned} 4\pi\mathfrak{A}(x, y, z) = &- \operatorname{rot}\int_\sigma (\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{n})\cos\left(\frac{k}{C}r\right)\frac{d\sigma}{r} + \\ &+ k\frac{\mu}{c}\int_\sigma (\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{n})\operatorname{sen}\left(\frac{k}{C}r\right)\frac{d\sigma}{r} - \operatorname{grad}\int_\sigma (\mathfrak{A}\times\mathfrak{n})\cos\left(\frac{k}{C}r\right)\frac{d\sigma}{r}, \\ 0 = &\operatorname{rot}\int_\sigma (\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{n})\operatorname{sen}\left(\frac{k}{C}r\right)\frac{d\sigma}{r} + \\ &+ k\frac{\mu}{c}\int_\sigma (\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{n})\cos\left(\frac{k}{C}r\right)\frac{d\sigma}{r} + \operatorname{grad}\int_\sigma (\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{n})\operatorname{sen}\left(\frac{k}{C}r\right)\frac{d\sigma}{r}. \end{aligned}$$

Altre due formole analoghe si otterrebbero dalla seconda delle (4).

6. Estensione delle formole che rappresentano il principio di Huygens. — Supponiamo, adesso, che nel campo elettromagnetico sia

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}^\star \quad , \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \mathfrak{H}^\star$$

$\mathfrak{E}_0$ ed $\mathfrak{H}_0$ essendo i vettori dati dalle (1), ovvero (1'), e quindi diventino infiniti nel punto A_0 che supporremo interno ad S, mentre $\mathfrak{E}^\star$, $\mathfrak{H}^\star$ sieno regolari almeno nella regione S che continueremo a supporre limitata dalla superficie σ. Per poter scrivere le nostre formole, in queste nuove ipotesi, escluderemo il punto A_0 da S per mezzo di una sfera β di centro A_0 e interna ad S. Potremo scrivere allora, senz'altro, le (4') purchè le integrazioni che compaiono nei secondi membri di esse si intendano estesi alla superficie σ ed alla sfera β. Notiamo, poi, che su β è $\mathfrak{n} = \mathfrak{r}_0$ e, quindi,

$$\mathfrak{E}_0 \wedge \mathfrak{n} = \frac{1}{r_0^3}\,\mathfrak{r}_0 \wedge \left(\mathfrak{p} + \frac{r_0}{C}\mathfrak{p}' + \frac{r_0^2}{C^2}\mathfrak{p}''\right) \quad , \quad \mathfrak{E}_0 \times \mathfrak{n} = \frac{2}{r_0^3}\,\mathfrak{r}_0 \times \left(\mathfrak{p} + \frac{r_0}{C}\mathfrak{p}'\right),$$

$$\mathfrak{H}_0 \wedge \mathfrak{n} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{1}{C r_0^2}\left\{-\left(\mathfrak{p}' + \frac{r_0}{C}\mathfrak{p}''\right) + \mathfrak{r}_0\left[\mathfrak{r}_0 \times \left(\mathfrak{p}' + \frac{r_0}{C}\mathfrak{p}''\right)\right]\right\},$$

$$\mathfrak{H}_0 \times \mathfrak{n} = 0\,.$$

Per cui, andando al limite, facendo tendere a zero il raggio della sfera β, si trova

$$\lim_{r_0=0}\int_\beta (\mathfrak{E} \wedge \mathfrak{n})_{\tau=t-\frac{r}{C}}\,\frac{d\sigma}{r} = -\frac{4\pi}{3}\,\mathrm{rot}\,\frac{\mathfrak{p}\left(t-\frac{R}{C}\right)}{R},$$

$$\lim_{r_0=0}\int_\sigma (\mathfrak{E} \times \mathfrak{n})_{\tau=t-\frac{r}{C}}\,\frac{d\sigma}{r} = -\frac{8\pi}{3}\,\mathrm{div}\,\frac{\mathfrak{p}\left(t-\frac{R}{C}\right)}{R},$$

$$\lim_{r_0=0}\int_\beta (\mathfrak{H} \wedge \mathfrak{n})_{\tau=t-\frac{r}{C}}\,\frac{d\sigma}{r} = -\frac{8\pi}{3}\,\frac{1}{C}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\mathfrak{p}\left(t-\frac{R}{C}\right)}{R},$$

indicando con R la distanza dei due punti A_0 ed A. E l'insieme dei termini, nel secondo membro della prima delle (4'), che contengono integrali estesi a β, ha per limite

$$\frac{4\pi}{3}\left\{\mathrm{rot}^2\,\frac{\mathfrak{p}\left(t-\frac{R}{C}\right)}{R} - \frac{2}{C^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\frac{\mathfrak{p}(\cdots)}{R} + 2\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\frac{\mathfrak{p}(\cdots)}{R}\right\} = 4\pi\,\mathrm{rot}^2\,\frac{\mathfrak{p}\left(t-\frac{R}{C}\right)}{R},$$

mentre il complesso dei termini analoghi che compaiono al secondo membro della seconda delle (4) converge a

$$-\frac{8\pi}{3}\frac{1}{\mathrm{C}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathrm{rot}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{p}(\cdots)}{\mathrm{R}}-\frac{4\pi}{3}\frac{1}{\mathrm{C}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathrm{rot}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{p}(\cdots)}{\mathrm{R}}=$$
$$=-4\pi\frac{1}{\mathrm{C}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathrm{rot}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{p}(\cdots)}{\mathrm{R}}\,.$$

Dalle (4′) deduciamo, così, le formole

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
4\pi[\mathfrak{E}(x,y,z,t)-\mathfrak{E}_0(x,y,z,t)] &= \int_\sigma\Big\{\mathfrak{r}\wedge\Big[\mathfrak{n}\wedge\Big(\frac{r}{\mathrm{C}}\mathfrak{E}'+\mathfrak{E}\Big)\Big]-\\
&\quad-\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{r}{\mathrm{C}}\,\mathfrak{n}\wedge\mathfrak{H}'-\mathfrak{r}\Big[\mathfrak{n}\times\Big(\frac{r}{\mathrm{C}}\mathfrak{E}'+\mathfrak{E}\Big)\Big]\Big\}_{\tau=t-\frac{r}{\mathrm{C}}}\frac{d\sigma}{r^2}\,,\\
4\pi[\mathfrak{H}(x,y,z,t)-\mathfrak{H}_0(x,y,z,t)] &= \int_\sigma\Big\{\mathfrak{r}\wedge\Big[\mathfrak{n}\wedge\Big(\frac{r}{\mathrm{C}}\mathfrak{H}'+\mathfrak{H}\Big)\Big]+\\
&\quad+\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{r}{\mathrm{C}}\,\mathfrak{n}\wedge\mathfrak{E}'-\mathfrak{r}\Big[\mathfrak{n}\times\Big(\frac{r}{\mathrm{C}}\mathfrak{H}'+\mathfrak{H}\Big)\Big]\Big\}_{\tau=t-\frac{r}{\mathrm{C}}}\frac{d\sigma}{r^2}\,.
\end{aligned}\right.$$

7. Applicazione delle formole precedenti alla determinazione di campi elettromagnetici. — Supporremo, intanto, che il campo elettromagnetico esista nel vuoto, o nell'aria, per cui sia da porsi, in tutte le nostre formole, $\varepsilon=\mu=1$, $\mathrm{C}=c$, e sia determinato da un centro di scuotimento elettromagnetico A_0. Se, allora, nell'interno del campo viene introdotto un corpo estraneo, il campo viene, ordinariamente, modificato tanto all'interno che all'esterno del corpo introdotto. E la determinazione del campo elettromagnetico all'interno del corpo estraneo, come la determinazione contemporanea del campo aggiuntivo all'esterno di esso, è un problema di solito complesso. La quistione si semplifica nel caso in cui il corpo estraneo introdotto nel campo elettromagnetico è completamente assorbente tale, cioè, che trasforma in energia termica tutta quanta la energia elettromagnetica che viene a contatto con la sua superficie. In questa ipotesi $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ si possono considerare noti, ad ogni istante, su tutta la superficie del corpo introdotto nel campo, e, precisamente, assumeranno i valori che avevano nel campo primitivo su tutti i punti di questa superficie che guardano il centro di scuotimento A_0, i valori zero in tutti gli altri punti. Nell'interno del corpo estraneo il campo elettromagnetico è nullo; all'esterno $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ assumono i valori determinati dalle (5) nella ipotesi che le integrazioni, ai secondi membri, sieno estesi alle porzioni della superficie del corpo esterno che guardano A_0 e, sotto gli integrali, per i valori di $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$, si assumono i valori di essi dovuti al centro A_0 di scuotimento.

8. Caso dei fenomeni luminosi. — Quello che abbiamo detto fin qui è applicabile ad ogni specie di fenomeni elettromagnetici. Nel caso, poi, in cui i fenomeni elettromagnetici diventino fenomeni luminosi e le grandezze

che in essi compaiono sono dello stesso ordine di grandezza di quelle corrispondenti che compaiono nei fenomeni luminosi, nei secondi membri delle (4') e (5), sotto gli integrali, si possono trascurare i termini che contengono a fattore $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$ rispetto a quelli che contengono $\mathfrak{E}'$ ed $\mathfrak{H}'$ e si può porre, in essi, $\varepsilon = \mu = 1$, $C = c$ se, come vogliamo supporre, si tratti sempre di un campo elettromagnetico esistente nel vuoto o nell'aria. Le considerazioni del numero precedente si possono estendere al caso attuale. E, se abbiamo un centro luminoso nel punto A_0 a causa del quale sia, nel punto (ξ , η , ζ),

$$\mathfrak{E}_0 = \frac{1}{r_0 c^2} \mathfrak{r}_0 \wedge (\mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{p}'') \quad , \quad \mathfrak{H}_0 = -\frac{1}{r_0 c^2} \mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{p}''$$

$\mathfrak{p}''$ essendo la derivata seconda, rispetto a τ, di un vettose $\mathfrak{p}$ funzione di $\xi , \eta , \zeta , \tau$, e introduciamo, poi, nelle vicinanze del punto luminoso un corpo perfettamente nero (cioè perfettamente assorbente rispetto alle radiazioni luminose), le condizioni ottiche fuori del corpo nero si possono ritenere determinate dalle (5) dopo aver introdotto in esse le precedenti semplificazioni, purchè gli integrali s' intendano estesi soltanto alle porzioni della superficie del corpo nero che guardano il centro luminoso e si sia posto, in questi integrali $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{H}_0$ al posto di $\mathfrak{E}$ ed $\mathfrak{H}$. Notando che, in queste ipotesi,

$$\mathfrak{E}_0 = - \mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{H}_0 \quad , \quad \mathfrak{H}_0 = \mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{E}_0 ,$$

le formole (5) si possono scrivere

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{E}_0 + \frac{1}{4\pi c} \int_\sigma \left\{ \mathfrak{r} \wedge (\mathfrak{n} \wedge \mathfrak{E}_0') - \mathfrak{n} \wedge (\mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{E}_0') - \mathfrak{r}(\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_0') \right\}_{\tau = t - \frac{r}{C}} \frac{d\sigma}{r} , \\ \mathfrak{H} &= \mathfrak{H}_0 + \frac{1}{4\pi c} \int_\sigma \left\{ \mathfrak{r} \wedge (\mathfrak{n} \wedge \mathfrak{H}_0') - \mathfrak{n} \wedge (\mathfrak{r}_0 \wedge \mathfrak{H}_0') - \mathfrak{r}(\mathfrak{n} \times \mathfrak{H}_0') \right\}_{\tau = t - \frac{r}{C}} \frac{d\sigma}{r} \end{aligned} \right.$$

e, quindi, salvo il nome del vettore che compare in ciascuna di esse, diventano identiche. Tenendo conto della relazione

$$\mathfrak{r} \wedge (\mathfrak{n} \wedge \mathfrak{E}_0') = \mathfrak{n}(\mathfrak{r} \times \mathfrak{E}_0') - \mathfrak{E}_0' \cos \widehat{rn}$$

in cui n indica la direzione della normale a σ, e di formole analoghe, la prima delle (6) che, soltanto, vogliamo prendere in considerazione, si scrive

$$(7) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \frac{1}{4\pi c} \int_\sigma \left\{ (\cos \widehat{r_0 n} - \cos \widehat{rn}) \mathfrak{E}_0' - \right.$$
$$\left. - (\mathfrak{r} + \mathfrak{r}_0)(\mathfrak{n} \times \mathfrak{E}_0') + \mathfrak{n}(\mathfrak{r} \times \mathfrak{E}_0') \right\}_{\tau = t - \frac{r}{C}} \frac{d\sigma}{r} .$$

Supponiamo, ora, che il nostro centro luminoso emetta luce monocromatica corrispondente al periodo T ed alla lunghezza d'onda $\lambda = c\mathrm{T}$ e che quindi il vettore $\mathfrak{p}$ sia proporzionale a $\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0}{\lambda} + \delta\right)$. Potremo allora porre $\mathfrak{E}_0$ sotto la forma

$$\mathfrak{E}_0 = \frac{\mathfrak{a}}{r_0} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0}{\lambda} + \delta\right)$$

$\mathfrak{a}$ essendo un vettore costante, finito e normale ad $\mathfrak{r}_0$ e ritenere la intensità luminosa, corrispondente a questa luce, proporzionale ad $\frac{\mathfrak{a}^2}{r_0^2}$. La (7) diventa allora

$$(8) \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 - \frac{1}{2\lambda}\int_\sigma \Big\{ (\cos \widehat{r_0 n} - \cos \widehat{rn})\, \mathfrak{a} - (\mathfrak{r} + \mathfrak{r}_0)(\mathfrak{n} \times \mathfrak{a}) + \\ + \mathfrak{n}(\mathfrak{r} \times \mathfrak{a}) \Big\} \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0 + r}{\lambda} + \delta\right) \frac{d\sigma}{r r_0}.$$

A questa formola, invece che a quella di Kirchhoff, si possono collegare, sotto forma quasi immutata, le considerazioni che lo stesso Kirchhoff fa nella seconda, terza e quarta delle sue *Vorlesungen über mathematische Optik*, per giustificare le leggi fondamentali dell'ottica geometrica.

9. Sui fenomeni di diffrazione. — Supponiamo, in fine, che il centro luminoso A_0 sia separato dal punto d'osservazione A da uno scherma perfettamente nero nel quale sia praticato un foro di dimensioni così piccole che, su tutta una superficie passante per il suo contorno, si possano ritenere, senza errore sensibile, costanti $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}_0, \mathfrak{n}, r$ e r_0. Nella ipotesi che la congiungente $A_0 A$ passi nelle vicinanze del contorno del foro si produrranno fenomeni di diffrazione; ed, in tutte queste ipotesi, potrà porsi anche

$$\mathfrak{r} + \mathfrak{r}_0 = 0 \quad , \quad \mathfrak{r} \times \mathfrak{a} = 0 \quad , \quad \cos \widehat{r_0 n} = -\cos \widehat{rn} \,,$$

per cui, dalla (8), abbiamo

$$(9) \qquad \mathfrak{E} = \frac{\cos \widehat{rn}}{\lambda r r_0}\, \mathfrak{a} \int_\sigma \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_0 + r}{\lambda} + \delta\right) d\sigma$$

che è, precisamente, la formola da cui si parte per lo studio dei fenomeni di diffrazione.