# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXVII.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

b) *l'altezza delle oscillazioni principali*. Le curve migliori sono quelle, in cui le oscillazioni principali sono uniformi e poco alte. Curve mediocri sono quelle, in cui le oscillazioni principali, pur essendo uniformi, sono molto alte: questo vuol dire che il soggetto segue troppo le variazioni della resistenza, cioè non è capace di compensarle immediatamente. Curve peggiori sono quelle, in cui le oscillazioni principali non sono uniformi, ma assai variabili in altezza.

c) *la presenza di dentellature e di sbalzi*. Questo è il fatto più importante da considerarsi. Nelle curve ottime le dentellature sono piccolissime e non si vedono mai sbalzi della leva. Ciò significa che il soggetto è capace di aumentare e diminuire in modo uniforme la contrazione dei proprî muscoli. Quando non è capace di ciò si hanno vibrazioni e bruschi rinforzi e abbassamenti delle contrazioni: insomma l'individuo regola saltuariamente i suoi muscoli ed allora si hanno quelle curve irregolarissime, che appunto sono caratteristiche delle persone inadatte e maldestre.

In forma schematica si possono così riassumere queste conclusioni:

*Curve ottime*, che indicano eccellenti attitudini muscolari: La curva rimane in una zona orizzontale mediana del tracciato; oscillazioni principali uniformi e basse con poche dentellature e senza sbalzi.

*Curve mediocri*: Curve ascendenti o discendenti; curve con oscillazioni principali molto alte e non uniformi; curve con molte dentellature.

*Curve cattive*, che indicano inattitudine a regolare adeguatamente le attività muscolari: Curve difformi, con grandi dentellature e sbalzi.

Come esempio, riporto nella fig. 3 una curva assai buona, ottenuta da un pilota bravissimo, e nella fig. 4 una curva assai cattiva, ricavata da una persona, che non ha precisione nè destrezza o agilità di movimenti e che perciò non potrebbe mai diventare un buon aviatore.

## Meccanica. — *Forma intrinseca delle equazioni gravitazionali nella relatività generale*. Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio Tullio Levi-Civita.

Nei fenomeni statici della meccanica einsteiniana, la forma quadratica quaternaria che congloba le misure dello spazio e del tempo si scinde in un termine che dipende dal tempo, e in una forma quadratica ternaria che è il quadrato dell'elemento lineare dello spazio ambiente [1].

In una Nota recente Levi-Civita [2] riferendosi alla statica nei campi vuoti si è valso dei coefficienti di rotazione di Ricci (invarianti $\gamma$ a tre in-

[1] Levi-Civita, *Statica einsteiniana* [questi Rend., vol. XXVI (1917). pag. 458 sgg.].

[2] Levi-Civita, *$ds^2$ einsteiniani in campi newtoniani*. II: *Condizioni di integrabilità e comportamento geometrico spaziale* [questi Rend., vol. XXVII (1918), pag. 3 sgg.].

dici) e di altri invarianti che da essi si deducono (invarianti $\gamma$ a quattro indici, riducibili per le forme ternarie a due soli indici) per attribuire alle equazioni dei campi predetti una notevole forma intrinseca, maggiormente atta che non la originaria a interpretare i caratteri metrici dello spazio ambiente.

Sotto questo stesso punto di vista reputo vantaggioso di applicare il criterio addirittura alle equazioni gravitazionali generali (valide cioè anche per fenomeni dinamici, oltre che statici) che il Levi-Civita stabilì per dare forma analitica esauriente alla geniale concezione einsteiniana (1). Per quanto il riferimento alla originaria forma quaternaria diminuisca i vantaggi che il Levi-Civita potè sfruttare colla limitazione ai fenomeni statici (per la conseguente riduzione ad una forma ternaria), tuttavia si perviene a qualche risultato degno di nota, particolarmente la circostanza che delle 10 componenti del tensore gravitazionale (eguali ed opposte a quelle del tensore energetico) 4 si esprimono ciascuna (a meno di uno stesso fattore costante) quale somma di tre e ciascuna delle rimanenti 6 di due dei succitati invarianti $\gamma$ a quattro indici, e in modo preciso il primo gruppo di quelli tra di essi a due soli indici distinti e il secondo gruppo di quelli a tre indici distinti.

1. *Richiamo delle equazioni gravitazionali.* — Sia

$$ds^2 = \sum_0^3{}_{ik}\, g_{ik}\, dx_i\, dx_k\,, \tag{1}$$

la forma quadratica quaternaria che congloba le misure di spazio e di tempo. Il $ds^2$ si intenderà a priori qualunque salvo le seguenti restrizioni qualitative (2):

$$g_{00} > 0 \quad , \quad g_{ii} < 0 \qquad (i = 1\,, 2\,, 3)\,. \tag{2}$$

Assumendo la (1) per forma fondamentale, sieno: $g^{(ik)}$ gli elementi reciproci ai coefficienti $g_{ik}$; $g_{il,mk}$ i simboli di Riemann di prima specie. Allora le posizioni

$$\mathrm{G}_{ik} = \sum_0^3{}_{lm}\, g^{(lm)}\, g_{il,mk} \qquad (i\,, k = 0\,, 1\,, 2\,, 3)\,, \tag{3}$$

definiscono manifestamente un sistema doppio covariante, il cui invariante lineare

$$\mathrm{G} = \sum_0^3{}_{ik}\, g^{(ik)}\, \mathrm{G}_{ik}\,, \tag{4}$$

è la *curvatura media* del $ds^2$.

(1) Levi-Civita, *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein* [questi Rend., vol. XXVI (1917), pag. 381 sgg.].

(2) Levi-Civita, *Sulla espressione* ecc., pag. 384.

Ciò premesso, il *tensore gravitazionale* viene dal Levi-Civita [1] definito mediante il sistema doppio covariante i cui elementi risultano determinati dalle seguenti posizioni:

$$\text{(I)} \qquad A_{ik} = \frac{1}{\chi} \left\{ G_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} G \right\},$$

dove $\chi$ dipende dalla costante $f$ di attrazione universale e dal valore $c$ della velocità di propagazione della luce nel vuoto a norma della relazione:

$$\chi = \frac{8\pi f}{c^4}.$$

Le equazioni gravitazionali si scrivono [2]:

$$\text{(II)} \qquad T_{ik} + A_{ik} = 0,$$

rappresentando $T_{ik}$ gli elementi del sistema doppio covariante che definisce il *tensore energetico* [2].

2. *Riferimento a elementi invarianti.* — Giova riferirsi ad una quaterna generica di congruenze ortogonali [0], [1], [2], [3] [3]; designando al solito con $0, 1, 2, 3$ le linee corrispondenti, sieno $\lambda_h^{(k)}$, $\lambda_{h/k}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) i sistemi coordinati controvariante e covariante della congruenza [$h$].

Si hanno allora le seguenti condizioni di ortogonalità:

$$\text{(5)} \qquad \sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g_{ik}\, \lambda_j^{(i)} \lambda_h^{(k)} = \varepsilon_{jh} \qquad (j, h = 0, 1, 2, 3),$$

dove al solito $\varepsilon_{jh}$ rappresenta lo zero o l'unità secondo che è $j \neq h$ oppure $j = h$.

Le precedenti sono notoriamente equivalenti anche a

$$\text{(5')} \qquad \sum_{0}^{3}{}_{ik}\, g^{(ik)} \lambda_{j/i} \lambda_{h/k} = \varepsilon_{jh},$$

oppure a

$$\text{(5'')} \qquad \sum_{0}^{3}{}_{k}\, \lambda_h^{(k)} \lambda_{j/k} = \varepsilon_{jh}.$$

Ciò premesso si moltiplichino i due membri della (I) e i due membri della (II) per $\lambda_j^{(i)} \lambda_h^{(k)}$ e si faccia la somma rispetto ad $i$ e a $k$ da 0 a 3, posto:

[1] Levi-Civita, loco ultimo citato, pag. 388.

[2] Com'è noto in questo tensore energetico è incluso il contributo di tutti i fenomeni (indipendenti dalla gravitazione) che si svolgono nel posto e nell'istante considerato.

[3] Ricci et Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* [Math. Ann., Bd. 54 (1900), pag. 145 sgg.].

$$(6)\qquad \alpha_{jh} = \sum_{ik}^{3}{}_0 \mathrm{A}_{ik}\, \lambda_j^{(i)}\, \lambda_h^{(k)}\,, \quad \tau_{jh} = \sum_{ik}^{3}{}_0 \mathrm{T}_{ik}\, \lambda_j^{(i)}\, \lambda_h^{(k)}\,,$$

$$(7)\qquad \Gamma_{jh} = \sum_{ik}^{3}{}_0 \mathrm{G}_{ik}\, \lambda_j^{(i)}\, \lambda_h^{(k)}\,, \qquad (j\,, h = 0\,, 1\,, 2\,, 3),$$

si ottiene, tenendo conto della (5):

$$(\mathrm{I}')\qquad \alpha_{jh} = \frac{1}{\chi} \left\{ \Gamma_{jh} - \frac{1}{2} \varepsilon_{jh}\, \mathrm{G} \right\},$$

e

$$(\mathrm{II}')\qquad \tau_{jh} + \alpha_{jh} = 0\,.$$

Viceversa da queste moltiplicate per $\lambda_{j/i}\, \lambda_{h/k}$ e sommate rispetto a $j$ e a $h$, tenendo conto delle condizioni di ortogonalità (5-5″) si ottengono le (I) e (II): pertanto il sistema (I′), (II′) è equivalente al sistema (I), (II).

Le equazioni (I′) e (II′) presentano sulle originarie (I) e (II) il vantaggio che in esse non compariscono che invarianti, come scende dalle formole (6) e (7). — È ovvio il significato degli invarianti $\tau_{jh}$ e $\alpha_{jh}$ definiti dalle (6). Riferendomi ad es. ai primi è facile riconoscere [1] che: $\tau_{jh} = \tau_{hj}$ $(j\,, h = 1\,, 2\,, 3)$ rappresenta la componente ortogonale secondo la linea della congruenza $[h]$ dello sforzo che si esercita sopra un elemento di superficie perpendicolare alla linea della congruenza $[j]$ (o viceversa scambiando $h$ con $j$); $\tau_{0j} = \tau_{j0}$ $(j = 1\,, 2\,, 3)$ rappresenta la componente del flusso di energia, ceduta in un secondo di luce, secondo la linea della congruenza $[j]$; infine $\tau_{00}$ è la densità di distribuzione della energia.

3. *Espressione degli invarianti* $\Gamma_{jh}$ *e* G *mediante elementi intrinseci.* — Essendo $\lambda_{h/rs}$ gli elementi del primo sistema derivato covariantemente secondo la forma fondamentale da quello del sistema $\lambda_{h/r}$, le formole

$$(8)\qquad \gamma_{hij} = -\gamma_{ihj} = \sum_{rs}^{3}{}_0 \lambda_i^{(r)}\, \lambda_j^{(s)}\, \lambda_{h/rs}$$

definiscono i *coefficienti di rotazione di Ricci*, che sono invarianti differenziali di primo ordine. Consideriamo in modo particolare gli invarianti di secondo ordine definiti dalle seguenti formole:

$$(9)\qquad \gamma_{hi,kj} = \frac{d\gamma_{hik}}{ds_j} - \frac{d\gamma_{hij}}{ds_k} + \sum_{p}^{3}{}_0 \left\{ \gamma_{hip}\,(\gamma_{pkj} - \gamma_{pjk}) + \gamma_{phj}\,\gamma_{pik} - \gamma_{phk}\,\gamma_{pij} \right\},$$

[1] Levi-Civita, *Sulla espressione* ecc., pag. 384.

dove $ds_j$ rappresenta l'elemento d'arco della linea $j$; essi sono legati ai simboli di Riemann e ai parametri della quaterna ortogonale [0], [1], [2], [3] dalle relazioni:

$$g_{il,mk} = \sum_0^3 {}_{qrst}\, \gamma_{qr,st}\, \lambda_{q/i}\, \lambda_{r/l}\, \lambda_{s/m}\, \lambda_{t/k}. \tag{10}$$

Poichè la eliminazione di $G_{ik}$ tra la (3) e la (7) porge

$$\Gamma_{jh} = \sum_0^3 {}_{ilmk}\, g^{(lm)}\, g_{il,mk}\, \lambda_j^{(i)}\, \lambda_h^{(k)},$$

eliminando in questa $g_{il,mk}$ a mezzo della (10) si ottiene, dopo facili riduzioni, tenendo presenti le (5-5''):

$$\Gamma_{jh} = \sum_0^3 {}_r\, \gamma_{jr,rh}. \tag{11}$$

Analogamente, avendosi dalla (4) per la (3):

$$G = \sum_0^3 {}_{ilmk}\, g^{(ik)}\, g^{(lm)}\, g_{il,mk},$$

eliminando $g_{il,mk}$ per mezzo della (10) si ottiene:

$$G = \sum_0^3 {}_{rt}\, \gamma_{tr,rt}. \tag{12}$$

4. *Forma intrinseca delle equazioni gravitazionali.* — Per la (11) e la (12) le relazioni (I') si possono scrivere:

$$\alpha_{jh} = \frac{1}{\chi} \sum_0^3 {}_r \left\{ \gamma_{jr,rh} - \frac{1}{2}\, \varepsilon_{jh} \sum_0^3 {}_t\, \gamma_{tr,rt} \right\}, \tag{I''}$$

che unitamente alle (II') costituiscono la annunciata forma intrinseca delle equazioni gravitazionali.

Sviluppando le sommatorie e rammentando le relazioni che legano tra di loro i simboli $\gamma_{qr,st}$, analoghe a quelle ben note dei corrispondenti simboli di Riemann, si ottiene con facili riduzioni:

$$
(\mathrm{I}''')\quad
\begin{cases}
\alpha_{00} = \dfrac{1}{\chi} \{ \gamma_{23,23} + \gamma_{31,31} + \gamma_{12,12} \} , \\[2mm]
\alpha_{11} = \dfrac{1}{\chi} \{ \gamma_{30,30} + \gamma_{02,02} + \gamma_{23,23} \} , \\[2mm]
\alpha_{22} = \dfrac{1}{\chi} \{ \gamma_{01,01} + \gamma_{13,13} + \gamma_{30,30} \} , \\[2mm]
\alpha_{33} = \dfrac{1}{\chi} \{ \gamma_{12,12} + \gamma_{20,20} + \gamma_{01,01} \} ; \\[2mm]
\alpha_{01} = \alpha_{10} = \dfrac{1}{\chi} \{ \gamma_{02,21} + \gamma_{03,31} \} , \\[2mm]
\alpha_{02} = \alpha_{20} = \dfrac{1}{\chi} \{ \gamma_{03,32} + \gamma_{01,12} \} , \\[2mm]
\alpha_{03} = \alpha_{30} = \dfrac{1}{\chi} \{ \gamma_{01,13} + \gamma_{02,23} \} . \\[2mm]
\alpha_{12} = \alpha_{21} = \dfrac{1}{\chi} \{ \gamma_{10.02} + \gamma_{13,32} \} , \\[2mm]
\alpha_{13} = \alpha_{31} = \dfrac{1}{\chi} \{ \gamma_{10,03} + \gamma_{12,23} \} , \\[2mm]
\alpha_{23} = \alpha_{32} = \dfrac{1}{\chi} \{ \gamma_{21,13} + \gamma_{20,03} \} .
\end{cases}
$$

## Matematica. — *Di una classe di forme dell'* $S_4$ *ognuna rappresentabile nelle coppie di un' involuzione dell'* $S_3$. Nota di G. MARLETTA, presentata dal Socio CASTELNUOVO.

Il Noether, in una lettera al Segre, e poi l' Enriques ([1]) hanno dimostrato che l' ipersuperficie cubica dell' $S_4$ è rappresentabile nelle coppie di un' involuzione dell' $S_3$. In questa breve Nota presento una classe d' ipersuperficie, dell' $S_4$, ognuna delle quali gode di questa stessa proprietà; in essa classe è contenuta la cubica sopradetta. La rappresentazione è condotta coi metodi della geometria proiettiva sintetica; si troveranno inoltre alcuni teoremi, relativi a congruenze di curve piane, che possono interessare.

1. Nell' $S_3$ sian dati, in posizione generica, un punto A e una curva gobba $c$, irriducibile e priva di punti doppî, d'ordine 8 e genere $p = 7$ (ulteriore intersezione, dunque, di due superficie cubiche aventi una retta comune e, del resto, in posizione generica tra loro).

([1]) Enriques, *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione di una equazione algebrica* $f(xyz) = 0$ *con funzioni razionali di due parametri* [Mathematische Annalen, Bd. 49 (1897), n. 19.