ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

boli di Riemann, si ottiene con facili riduzioni:

$$
(\mathrm{I}''')\quad \left\{
\begin{aligned}
\alpha_{00} &= \frac{1}{\chi} \} \gamma_{23,23} + \gamma_{31,31} + \gamma_{12,12} \{ , \\
\alpha_{11} &= \frac{1}{\chi} \} \gamma_{30,30} + \gamma_{02,02} + \gamma_{23,23} \{ , \\
\alpha_{22} &= \frac{1}{\chi} \} \gamma_{01,01} + \gamma_{13,13} + \gamma_{30,30} \{ , \\
\alpha_{33} &= \frac{1}{\chi} \} \gamma_{12,12} + \gamma_{20,20} + \gamma_{01,01} \{ ; \\
\alpha_{01} = \alpha_{10} &= \frac{1}{\chi} \} \gamma_{02,21} + \gamma_{03,31} \{ , \\
\alpha_{02} = \alpha_{20} &= \frac{1}{\chi} \} \gamma_{03,32} + \gamma_{01,12} \{ , \\
\alpha_{03} = \alpha_{30} &= \frac{1}{\chi} \} \gamma_{01,13} + \gamma_{02,23} \{ . \\
\alpha_{12} = \alpha_{21} &= \frac{1}{\chi} \} \gamma_{10.02} + \gamma_{13,32} \{ , \\
\alpha_{13} = \alpha_{31} &= \frac{1}{\chi} \} \gamma_{10,03} + \gamma_{12,23} \{ , \\
\alpha_{23} = \alpha_{32} &= \frac{1}{\chi} \} \gamma_{21,13} + \gamma_{20,03} \{ .
\end{aligned}
\right.
$$

Matematica. — *Di una classe di forme dell'* S_4 *ognuna rappresentabile nelle coppie di un' involuzione dell'* S_3. Nota di G. Marletta, presentata dal Socio Castelnuovo.

Il Noether, in una lettera al Segre, e poi l' Enriques [1] hanno dimostrato che l' ipersuperficie cubica dell' S_4 è rappresentabile nelle coppie di un' involuzione dell' S_3. In questa breve Nota presento una classe d' ipersuperficie, dell' S_4, ognuna delle quali gode di questa stessa proprietà; in essa classe è contenuta la cubica sopradetta. La rappresentazione è condotta coi metodi della geometria proiettiva sintetica; si troveranno inoltre alcuni teoremi, relativi a congruenze di curve piane, che possono interessare.

1. Nell' S_3 sian dati, in posizione generica, un punto A e una curva gobba c, irriducibile e priva di punti doppî, d'ordine 8 e genere $p = 7$ (ulteriore intersezione, dunque, di due superficie cubiche aventi una retta comune e, del resto, in posizione generica tra loro).

(1) Enriques, *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione di una equazione algebrica* $f(xyz) = 0$ *con funzioni razionali di due parametri* [Mathematische Annalen, Bd. 49 (1897), n. 19.

Un piano ω condotto per A seca c in 8 punti pei quali passa una ed una sola quartica k avente A come triplo; al variare di ω, per A, si ottengono cosí ∞^2 quartiche k ognuna 8-secante c e con A triplo, le quali quartiche generano una congruenza (razionale). Si vuol dimostrare che questa congruenza è d'ordine 2.

Infatti le superficie d'ordine 5 aventi il punto A 4-plo e passanti per la curva c soddisfano (1) a $20+(5\cdot 8-7+1)=54$ condizioni lineari, onde esse costituiscono un fascio Φ. Inoltre siccome una qualunque k_1, delle quartiche k, ha già $8+3\cdot 4=4\cdot 5$ punti comuni con ogni superficie di Φ, segue che per k_1 passa una (sola) di queste superficie; sia φ_1.

L'ulteriore intersezione di φ_1 col piano di k_1 è una retta passante per A e, generalmente, non incidente c. Viceversa è chiaro che ogni piano condotto per una siffatta retta seca ulteriormente φ_1 in una quartica k. Di rette siffatte, in φ_1, ne esistono 2; infatti φ_1 e il cono che da A proietta c si secano in questa curva, nelle 14 corde di c uscenti da A, ognuna contata due volte, e in una quartica avente A multiplo secondo $4\cdot 8-14\cdot 2=4$, quartica che dunque è costituita da quattro rette uscenti da questo stesso punto (2). Ne segue senz'altro che le $4\cdot 5=20$ rette di φ_1 passanti per A sono: queste 4 rette, le 14 corde di c sopradette, e altre 2 rette (generalmente) non incidenti c. Dunque sulla superficie φ_1 le quartiche k costituiscono due fasci.

Ed ora siccome per un punto generico dello spazio ambiente passa una sola superficie di Φ, si può concludere che

le quartiche 8-secanti una data curva gobba (irriducibile e priva di punti doppi) d'ordine 8 *e genere* $p=7$, *e aventi come triplo un dato punto fuori di questa curva, generano una congruenza d'ordine* 2.

2. Nel numero precedente si dimostrò che in ogni superficie del fascio Φ esistono due rette, ciascuna passante per il punto A e non incidente la curva c. Tutte queste rette, che per brevità chiameremo *notevoli*, costituiscono un fascio; infatti in un piano ω, genericamente condotto per A, esiste una sola k' delle quartiche k (n. 1); questa k' appartiene ad una sola, φ', delle superficie del fascio Φ ed è complanare con una sola delle due rette notevoli esistenti in questa superficie φ'. Nè in ω può esistere una retta notevole appartenente ad una superficie φ'', di Φ, non coincidente con φ', perchè in tal caso in ω oltre della k' esisterebbe un'altra quartica k, e precisamente l'ulteriore intersezione di ω con φ', ciò che è assurdo. Dunque è proprio vero che le rette notevoli costituiscono un fascio; in questo le coppie, ognuna appartenente ad una stessa superficie di Φ, generano un'in-

(1) Severi, *Su alcune questioni di postulazione* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XVII (1903)], n. 10 *b*.

(2) Del resto allo stesso risultato è assai facile pervenire direttamente.

voluzione. Ciò posto si indichi con α il piano del sopradetto fascio di rette notevoli; esso piano seca una qualunque delle superficie di Φ nelle due rette notevoli, in essa superficie esistenti, e in una cubica c' 8-secante la curva c e avente il punto A come doppio, cubica che, di conseguenza, appartiene a tutte le superficie del fascio Φ perchè con ognuna di esse ha già $8 + 2 \cdot 4 = 3 \cdot 5 + 1$ punti comuni. La c' è dunque quella curva, d'ordine 3, che insieme con c e con le 14 corde di questa passanti per A, costituisce la (totale) base del fascio Φ. Si osservi, ancora, che non può esistere alcun'altra cubica, oltre della c', 8-secante c e avente A come doppio, perchè un'altra cubica siffatta dovrebbe far parte anch'essa della base di Φ, ciò che è assurdo.

Concludiamo dunque che

esiste una (sola) cubica 8-secante una data curva gobba (irriducibile e priva di punti doppi) d'ordine 8 *e genere* $p = 7$, *e che abbia come doppio un dato punto fuori di questa.*

3. Mediante considerazioni perfettamente analoghe a quelle dei numeri precedenti è facile dimostrare i due seguenti teoremi:

a) *le cubiche 6-secanti una data sestica gobba (irriducibile e priva di punti doppi) di genere* $p = 2$, *e aventi come doppio un dato punto fuori di questa, generano una congruenza d'ordine* 2.

b) *esiste una (sola) conica 6-secante una data sestica gobba (irriducibile e priva di punti doppi) di genere* $p = 2$, *e passante per un dato punto fuori di questa* (1).

4. Nell'S_4 sian date: un'ipersuperficie Γ d'ordine n avente un piano π $(n-3)$-plo e una retta r $(n-2)$-pla in questo; si indichi con a una generica curva di Γ secata in un sol punto variabile dagli spazî (2) condotti per π. Siano, inoltre, Γ' un'ipersuperficie cubica passante per r e Σ uno spazio qualunque, del resto in posizione perfettamente generica tra loro e rispetto a Γ.

Preso un punto generico P di Γ, si consideri lo spazio $\Sigma' \equiv P\pi$; esso seca Γ' e, ulteriormente, Γ in due superficie cubiche γ' e γ aventi la retta r

(1) Montesano, *Su i varî tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio* [Rendiconti della R. Accad. delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, fasc. 7° (1895)], Nota 2ª, n. 1; Berzolari, *Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e lettere, serie II, vol. XXXIII (1900)], Nota 2ª, n. 42; e Severi, *Ricerche sulle coniche secanti delle curve gobbe* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXXV (1900)]. — Analogamente a come si fece nel n. 1, si può dimostrare che *le cubiche 6-secanti una data curva gobba (irriducibile e priva di punti doppi) d'ordine* 7 *e genere* $p = 6$, *e aventi come doppio un dato punto fuori di questa, generano una congruenza d'ordine* 3.

(2) Per es. in un S_3 passante genericamente per la retta r; cfr. Noether, *Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen* [Mathem. Annalen, Bd. III (1870)].

comune; si indichi con c la curva, d'ordine 8 e genere $p = 7$, ulteriore intersezione di γ e γ'.

Per quanto si disse nel n. 1, esistono due (sole) quartiche k ognuna delle quali abbia come triplo il punto (variabile) $A \equiv \Sigma' a$, sia 8-secante c e passi per P. I piani di queste due quartiche secano Σ in due rette l_1 e l_2 incidenti la retta $s \equiv \Sigma\pi$. Viceversa, data una qualunque, per es. l_1, delle rette di Σ incidenti s, lo spazio $l_1 \pi \equiv \Sigma'$ seca a, fuori di π, nel punto A, ed esiste una sola quartica, k', avente A triplo e passante per gli 8 punti in cui il piano Al_1 seca c. Questa quartica k' incontra l'ipersuperficie $\boldsymbol{\Gamma}$, fuori di c di π e di A, in un sol punto: P. Dunque con la costruzione ora detta rimane stabilita una corrispondenza algebrica biunivoca fra i punti di $\boldsymbol{\Gamma}$ e le coppie di un'involuzione I esistente nel complesso lineare speciale generato dalle rette dello spazio Σ incidenti s. Ne segue senz'altro che

ogni ipersuperficie, dell' S_4, *d'ordine* n, *con piano* $(n-3)$*-plo e retta* $(n-2)$*-pla in questo, è rappresentabile nelle coppie di un'involuzione dell'* S_3.

Per $n = 3$ questo teorema era, come si disse in principio, noto, ma ne è nuova la rappresentazione qui data.

Matematica. — *Quelques propriétés des fonctions de Bessel.* Nota I di JOSEPH PÉRÈS, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Je démontre ici quelques propriétés des fonctions de Bessel, que j'ai énoncées ailleurs et qui permettent d'étudier très simplement les développements de Neumann et leurs généralisations.

J'utiliserai quelques résultats de la théorie des *fonctions permutables*, que je rappelle. Le symbole de *composition* $\overset{*}{f}\overset{*}{g}(x.y)$ désignant l'intégrale

$$\int_x^y f(x.\xi)\, g(\xi.y)\, d\xi\,, \tag{1}$$

si les fonctions f et g ne dependent que de $y - x$ [1], en posant $y - x = t$, il vient

$$\overset{*}{f}\overset{*}{g}(t) = \overset{*}{f}\overset{*}{g}(y-x) = \tag{2}$$
$$= \int_x^y f(\xi - x)\, g(y - \xi)\, d\xi = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\,.$$

[1] Sont permutables avec l'unité [Volterra].