ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

comune; si indichi con c la curva, d'ordine 8 e genere $p = 7$, ulteriore intersezione di γ e γ'.

Per quanto si disse nel n. 1, esistono due (sole) quartiche k ognuna delle quali abbia come triplo il punto (variabile) $A \equiv \Sigma' a$, sia 8-secante c e passi per P. I piani di queste due quartiche secano Σ in due rette l_1 e l_2 incidenti la retta $s \equiv \Sigma\pi$. Viceversa, data una qualunque, per es. l_1, delle rette di Σ incidenti s, lo spazio $l_1\pi \equiv \Sigma'$ seca a, fuori di π, nel punto A, ed esiste una sola quartica, k', avente A triplo e passante per gli 8 punti in cui il piano Al_1 seca c. Questa quartica k' incontra l'ipersuperficie Γ, fuori di c di π e di A, in un sol punto: P. Dunque con la costruzione ora detta rimane stabilita una corrispondenza algebrica biunivoca fra i punti di Γ e le coppie di un'involuzione I esistente nel complesso lineare speciale generato dalle rette dello spazio Σ incidenti s. Ne segue senz'altro che

ogni ipersuperficie, dell' S_4, *d'ordine* n, *con piano* $(n-3)$*-plo e retta* $(n-2)$*-pla in questo, è rappresentabile nelle coppie di un'involuzione dell'* S_3.

Per $n = 3$ questo teorema era, come si disse in principio, noto, ma ne è nuova la rappresentazione qui data.

Matematica. — *Quelques propriétés des fonctions de Bessel.* Nota I di Joseph Pérès, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Je démontre ici quelques propriétés des fonctions de Bessel, que j'ai énoncées ailleurs et qui permettent d'étudier très simplement les développements de Neumann et leurs généralisations.

J'utiliserai quelques résultats de la théorie des *fonctions permutables*, que je rappelle. Le symbole de *composition* $\overset{*}{f}\overset{*}{g}(x.y)$ désignant l'intégrale

$$\int_x^y f(x.\xi)\, g(\xi.y)\, d\xi\,, \tag{1}$$

si les fonctions f et g ne dependent que de $y - x$ [1], en posant $y - x = t$, il vient

$$\overset{*}{f}\overset{*}{g}(t) = \overset{*}{f}\overset{*}{g}(y-x) = \tag{2}$$
$$= \int_x^y f(\xi - x)\, g(y-\xi)\, d\xi = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\,.$$

[1] Sont permutables avec l'unité [Volterra].

On a d'ailleurs

$$\overset{\bullet}{f}\overset{\bullet}{g}(t) = \overset{\bullet}{g}\overset{\bullet}{f}(t)$$

et les calculs de composition se font comme les calculs de produits.

Sans revenir sur la définition des puissances de composition [1], je rappelle que, si n est positif, on a

$$\overset{\bullet}{1}{}^{n} = \frac{(y-x)^{n-1}}{\Gamma(n)} = \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}; \tag{3}$$

et que, si

$$f(t) = c\,\overset{\bullet}{1}\,(\overset{\bullet}{1}{}^{0} + \overset{\bullet}{\mathrm{H}}(t)) \qquad (c = \text{constante})$$

on a

$$\overset{\bullet}{f}{}^{n}(t) = c^n\,\overset{\bullet}{1}{}^{n}(\overset{\bullet}{1}{}^{0} + \overset{\bullet}{\mathrm{H}}(t))^n = c^n\,\overset{\bullet}{1}{}^{n}\left(\overset{\bullet}{1}{}^{0} + n\overset{\bullet}{\mathrm{H}} + \frac{n(n-1)}{1.2}\overset{\bullet}{\mathrm{H}}{}^{2} + \cdots\right). \tag{4}$$

J'ai montré précédemment [2] que l'on peut encore définir la composition dans le cas où l'intégrale (1) cesse d'avoir un sens, f et g devenant infinies d'ordre determinés pour $t=0$: il suffit en général de remplacer l'intégrale par sa partie finie. Il en resulte immédiatement [3] que les formules (3) et (4) sont valables quel que soit n distinct d'un entier négatif; $\overset{\bullet}{f}{}^{n}(t)$ étant toujours une fonction de t parfaitement définie [4]. Dans tous les cas, l'exposant de composition a toutes les propriétés des exposants ordinaires.

2. Ceci posé nous démonstrerons que:

Théorème. — *Il existe une fonction entière $\Psi(t)$ telle que la fonction de Bessel*

$$\mathrm{J}_n(t) = \sum_0^{\infty}{}_r \frac{(-1)^r\, t^{n+2r}}{2^{n+2r}\, r!\, \Gamma(n+r+1)} \tag{5}$$

puisse, quel que soit n, se mettre sous la forme

$$\mathrm{J}_n(t) = \overset{\bullet}{\mathrm{J}}_0\,\overset{\bullet}{\Psi}{}^{n}(t). \tag{6}$$

Pour le démontrer remarquons que le procédé de sommation des séries divergentes de Borel [5] conduit à associer les fonctions

$$f(\zeta) = a_0\zeta + a_1\zeta^2 + \cdots + a_n\zeta^{n+1} + \cdots$$

et

$$\mathrm{F}(t) = a_0 + a_1\frac{t}{1!} + \cdots + a_n\frac{t^n}{n!} + \cdots.$$

(1) Cf Volterra, Atti della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. XI.

(2) Cf. deux notes des Rend. R. A. Lincei, 1er sem. 1917.

(3) Parceque la généralisation ainsi obtenue pour la composition en conserve les propriétés.

(4) Si n est un entier négatif ou nul, $\overset{\bullet}{1}{}^{n}$ n'est pas nul, mais représente un symbole de derivation par rapport à t; $\overset{\bullet}{f}{}^{n}$, toujours donné par la formule (4), contient les symboles $\overset{\bullet}{1}{}^{0}$, $\overset{\bullet}{1}{}^{-1}$, etc. (par exemple $\overset{\bullet}{f}{}^{0} = \overset{\bullet}{1}{}^{0}$) (cf. la 2ème de mes Notes précédemment citées).

(5) avec une modification de détail.

Nous associerons de même, r étant un exposant quelconque, les fonctions

$$(7)\qquad f(\zeta) = a_0\,\zeta^r + a_1\,\zeta^{r+1} + \cdots + a_n\,\zeta^{r+n} + \cdots$$

$$(8)\qquad F(t) = a_0\,\frac{t^{r-1}}{\Gamma(r)} + a_1\,\frac{t^r}{\Gamma(r+1)} + \cdots + a_n\,\frac{t^{r+n-1}}{\Gamma(r+n)} + \cdots,$$

et il est immédiat que les fonctions $t\,F(t)$, $t^2\,F(t)$, $t\,\frac{dF(t)}{dt}$, $t^2\frac{d^2F}{dt^2}$, ont pour associées, respectivement, les fonctions $\zeta^2\frac{df}{d\zeta}$, $\zeta^3\frac{d^2}{d\zeta^2}(\zeta f)$ $\zeta^2\frac{d}{\partial\zeta}\left(\frac{f}{\zeta}\right)$, $\zeta^3\frac{d^2}{d\zeta^2}\left(\frac{f}{\zeta}\right)$. Il est d'ailleurs immédiat, qu'à des produits de fonctions f correspondront les compositions des fonctions $F(t)$ correspondantes [1].

En designant alors par $j_n(\zeta)$ [2] la fonction associée à $J_n(t)$, l'équation différentielle de Bessel conduit, d'après les remarques précédentes, à l'équation suivante:

$$(9)\qquad \frac{d^2 j_n}{d\zeta^2}\,\zeta^2(1+\zeta^2) + \frac{dj_n}{d\zeta}\,(2\zeta^3 - \zeta) + j_n(1-n^2) = 0$$

que vérifie $j_n(\zeta)$. Mais cette équation admet comme solutions fondamentales

$$u(\zeta)\,[\psi(\zeta)]^n \quad \text{et} \quad u(\zeta)\,[\psi(\zeta)]^{-n}$$

avec

$$u(\zeta) = \frac{\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}} \qquad \psi(\zeta) = \frac{\sqrt{1+\zeta^2}-1}{\zeta}\ (^2).$$

En comparant les premiers termes du développement en série de j_n et de $u(\zeta)\,[\psi(\zeta)]^n$ on en déduit que nécessairement

$$j_n(\zeta) = u(\zeta)\,[\psi(\zeta)]^n$$

et, passant de là aux fonctions associées $J_n(t)$, $U(t)$, $\Psi(t)$

$$J_n(t) = \overset{*}{U}\,\overset{*}{\Psi}{}^n(t).$$

On a d'ailleurs

$$u(\zeta) = \Sigma(-1)^r\,\frac{\zeta^{2r+1}}{2^{2r}}\,C_{2r}^r = j_0(\zeta)$$

$$\psi(\zeta) = \Sigma(-1)^r\,\frac{\zeta^{2r+1}}{2^{2r+1}}\,\frac{1}{r+1}\,C_{2r}^r$$

de sorte que

$$U(t) = J_0(t) \quad , \quad \Psi(t) = \frac{J_1(t)}{t} = \frac{J_0(t)+J_2(t)}{2}.$$

Le Théorème annoncé est ainsi établi.

[1] de même, les exposants ordinaires et de composition se correspondent.

[2] Il est aisé de voir que la série $j_n(\zeta)$ a un rayon de convergence non nul.

Remarque I. — La fonction $u(\zeta)$ est telle que

$$[u(\zeta)]^2 = \frac{\zeta^2}{1+\zeta^2}$$

or la fonction associée de $\dfrac{\zeta^2}{1+\zeta^2}$ est $\sin t$; on a donc

$$\overset{*}{J}{}_0^2(t) = \sin t$$

ou

$$J_0(t) = [\overset{*}{\sin}\, t]^{1/2}$$

Remarque II. — On sait que si n est entier J_n et J_{-n} coïncident au signe près et ne fournissent donc qu'une seule solution de l'équation de Bessel correspondante. Une seconde solution s'exprime à l'aide de $\dfrac{dJ_n}{dn}$ et de $\dfrac{dJ_{-n}}{dn}$. On l'exprimera donc aisément par une formule analogue à (6) en introduisant les logarithmes de composition de M. Volterra ([2]). Par exemple, si $n = 0$, la seconde solution sera

$$\overset{*}{J}_0\, \overset{*}{l}\, \Psi \tag{10}$$

le symbole $l\,\Psi$ designant le logarithme de composition de Ψ.

3. Le Théorème précédent peut encore se démontrer comme il suit. La transformation qui fait passer de $f(\zeta)$ à $F(t)$ et qui fait correspondre aux produits de fonctions f les compositions des fonctions F a une expression analytique simple. Comme l'on a

$$(11)\quad \Gamma(\zeta) = \frac{1}{2i \sin \pi\zeta}\int_c y^{\zeta-1} e^y\, dy \qquad (12)\quad \frac{1}{\Gamma(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_c y^{-\zeta} e^y\, dy$$

la relation entre les fonctions (7) et (8) peut s'écrire

$$(13)\quad f(\zeta) = \frac{\zeta}{2i \sin \pi r}\int_{c'} e^y F(-\zeta y)\, dy \quad (14)\quad F(t) = \frac{1}{2\pi i t}\int_{c''} e^y f\left(\frac{t}{y}\right) dy \text{ } (^3).$$

([1]) En effet, par un changement de variable et de fonction très simple on ramène cette équation à l'équation $y''_{x^2} - n^2 y = 0$.

([2]) Cf. le Mémoire déjà cité : Atti della R. A. dei Lincei.

([3]) Dans les formules précédentes les contours d'intégration sont les suivants : c est formé par le segment $-\infty, -R$ de l'axe réel, le cercle de rayon R, décrit autour de l'origine dans le sens positif, le segment $-R, -\infty$ de l'axe réel. c' et c'' sont deux

Mais on sait que

$$\text{(15)} \qquad J_n(t) = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^n}{2\pi i} \int_c e^{u - \frac{t^2}{4u}} u^{-n-1}\, du$$

formule qui, par le changement de variable

$$y = u - \frac{t^2}{4u}$$

devient

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi i t} \int_{c''} e^y \frac{\frac{t}{y}}{\sqrt{1 + \frac{t^2}{y^2}}} \left\{ \frac{\sqrt{1 + \frac{t^2}{y^2}} - 1}{\frac{t}{y}} \right\}^n dy\,.$$

Il en resulte bien que la fonction associée $j_n(\zeta)$ est

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1+\zeta^2}} \left\{ \frac{\sqrt{1+\zeta^2} - 1}{\zeta} \right\}^n .$$

---

contours analogues. Lorsque r est entier, on doit remplacer (13) par

$$f(\zeta) = \zeta \int_0^\infty e^{-y}\, F(\zeta y)\, dy$$

et on peut prendre pour c'' un cercle de centre l'origine. On obtient alors des formules bien connues.