ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 giugno 1918.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica. — *Sui motori sincroni senza eccitazione considerati come circuiti di autoinduzione variabile.* Nota del Corrispondente O. M. Corbino.

Questa Nota sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

Analisi. — *Sopra l'integrazione approssimata delle equazioni differenziali.* Nota di G. Armellini, presentata dal Socio Tullio Levi-Civita.

1. Mi propongo di esporre in questa Nota un metodo per l'integrazione approssimata delle equazioni differenziali; metodo che io spero di poter applicare in Note seguenti ai problemi fondamentali della Meccanica celeste. Il procedimento da me ideato, come i lettori vedranno, è estremamente semplice. Ma poichè, non ostante le ricerche in proposito, non mi è stato possibile di rinvenirlo in alcun trattato o Memoria, e poichè d'altra parte mi sembra che esso possa essere utile non solo nella Meccanica celeste, ma anche in molti problemi pratici, mi sono deciso di comunicarlo all'Accademia.

2. Supponiamo dunque di avere un sistema differenziale di ordine m. Con procedimenti di natura algebrica noi possiamo immaginare di averlo ridotto ad un'equazione differenziale di ordine m tra la variabile indipendente x e la funzione incognita y:

$$y^{(m)} = \mathrm{F}(x, y, y', y'' \ldots y^{(m-1)}). \tag{1}$$

Supporremo che la (1) non si sappia integrare direttamente. Prendiamo allora sull'asse delle x un intervallo arbitrario p. es.

$$b \geqq x \geqq c \tag{2}$$

e proponiamoci di studiare in questo intervallo un integrale particolare y definito dalle condizioni iniziali

$$y = \lambda \quad y' = \lambda_1 \quad y'' = \lambda_2 \ldots y^{(m-1)} = \lambda_{m-1} \quad \text{per} \quad x = b$$

dove le λ_i sono grandezze date a piacere. È questo il problema che più interessa nei casi pratici.

Supporremo soltanto l'*esistenza* in tutto l'intervallo dato delle derivate $y^{(h)}$ di tutti gli ordini, e supporremo ancora che i valori che queste derivate assumono nel punto $x = b$ cioè

$$\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_{m-1}\, \lambda_m\, \lambda_{m+1} \ldots \lambda_h \ldots$$

non tendano all'infinito al crescere di h. Queste condizioni sono verificate nella grandissima maggioranza dei casi pratici, e di più esse sono sufficienti ma non necessarie per l'applicabilità del metodo, onde il procedimento ha una portata più ampia.

Inutile aggiungere che tutte le λ debbono riguardarsi come quantità note; infatti noi conosciamo le prime $m - 1$ tra esse; derivando dunque la (1) e ponendovi $x = b$ abbiamo immediatamente λ_h qualunque sia l'indice h.

3. Ciò posto, noi ci proponiamo di risolvere il seguente problema:

Scelto ad arbitrio un numero n intero e positivo si domanda di determinare $n + 1$ coefficienti costanti $a_0\, a_1 \ldots a_n$ in modo tale che, rappresentando l'integrale particolare y col polinomio

$$Y_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\,, \tag{3}$$

l'errore medio della rappresentazione nell'intervallo arbitrario $b \geqq x \geqq c$ risulti minimo, rispetto ad ogni altro polinomio di grado n.

Chiameremo questo tale polinomio Y_n col nome di « *Polinomio di massima approssimazione di grado n* ».

Anzi tutto occorre dimostrare l'*esistenza* e l'*unicità* di un tale polinomio. A tale scopo basta ripetere, con poche modificazioni, l'analoga dimostrazione data nei Corsi di Analisi, per provare l'esistenza e l'unicità dei polinomi di Tchebicheff [1]. Passiamo ora alla determinazione dei coefficienti.

4. Cominciamo ad osservare che senza togliere nulla alla generalità del metodo noi possiamo sempre supporre uguale allo zero quell'estremo dell'intervallo per cui non sono dati i valori della y e delle sue $m - 1$

[1] V. p. es. E. Borel, *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, Ch. IV, pag. 82.

derivate. Nel nostro caso supporremo dunque $c = 0$ onde b sarà una quantità positiva.

Ciò posto indicando con k un intero positivo arbitrario costruiamoci l'integrale definito

$$S_k = \int_0^b y x^k \, dx \,. \tag{4}$$

Avremo, integrando per parti,

$$\begin{aligned} S_k &= \left(\frac{y x^{k+1}}{k+1}\right)_0^b - \frac{1}{k+1}\int_0^b y' x^{k+1}\, dx = \left(\frac{y x^{k+1}}{k+1}\right)_0^b - \\ &\quad - \left(\frac{y' x^{k+2}}{(k+1)(k+2)}\right)_0^b + \frac{1}{(k+1)(k+2)}\int_0^b y'' x^{k+2}\, dx = \\ &= \left(\frac{y x^{k+1}}{k+1}\right)_0^b - \left(\frac{y' x^{k+2}}{(k+1)(k+2)}\right)_0^b + \left(\frac{y'' x^{k+3}}{(k+2)(k+2)(k+3)}\right)_0^b - \\ &\quad - \left(\frac{y''' x^{k+4}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\right)_0^b + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

cioè sostituendo:

$$S_k = k!\, b^{k+1} \left\{ \frac{\lambda}{(k+1)!} - \frac{\lambda_1 b}{(k+2)!} + \frac{\lambda_2 b^2}{(k+3)!} - \frac{\lambda_3 b^3}{(k+4)!} + \cdots \right\}. \tag{6}$$

Ora le λ_h sono quantità note, finite e determinate, e di più esse non tendono all'infinito col crescere di h. È chiaro dunque che la serie al secondo membro della (6) è certamente convergente qualunque sia il valore di b: dunque S_k deve riguardarsi come una quantità nota qualunque sia l'indice k.

In particolare per $k = 0$ abbiamo

$$S_0 = \int_0^b y\, dx = b \left\{ \lambda - \frac{\lambda_1 b}{2!} + \frac{\lambda_2 b^2}{3!} - \frac{\lambda_3 b^3}{4!} + \cdots \right\}. \tag{7}$$

Inutile aggiungere che S_0 rappresenta l'area racchiusa tra la curva integrale, l'asse delle x, l'asse delle y e la retta $x = b$; area che può quindi esattamente calcolarsi. Così $\frac{S_1}{S_0}$ dà l'ascissa del baricentro, la S_2 dà il momento d'inerzia rispetto all'asse delle y ecc.

5. Ciò posto, rappresentando, in via approssimata, l'integrale particolare y per mezzo del polinomio Y_n dato dalla (3), l'errore medio E_n che si commette nell'intervallo $b \geqq x \geqq 0$ è espresso, come è notissimo, dalla formola:

$$\begin{aligned} E_n^2 &= \frac{1}{b}\int_0^b (Y_n - y)^2\, dx = \\ &= \frac{1}{b}\int_0^b \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n - y \}^2\, dx \,. \end{aligned} \tag{8}$$

Ora noi ci siamo proposti di scegliere le $n+1$ costanti $a_0\, a_1 \dots a_n$ in modo che l'errore E_n risulti minimo. Poichè esse sono indipendenti tra di loro avremo le $n+1$ equazioni

$$\frac{\partial E_n}{\partial a_0} = \frac{\partial E_n}{\partial a_1} = \frac{\partial E_n}{\partial a_2} = \cdots = \frac{\partial E_n}{\partial a_n} = 0 . \tag{9}$$

Eseguendo le derivazioni le (9) divengono:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^b y\, dx &= \int_0^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n)\, dx \\ \int_0^b yx\, dx &= \int_0^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n)\, x\, dx \\ \int_0^b yx^2\, dx &= \int_0^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n)\, x^2\, dx \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_0^b yx^n\, dx &= \int_0^b (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n)\, x^n\, dx . \end{aligned} \right. \tag{10}$$

cioè effettuando i calcoli

$$\left\{ \begin{aligned} S_0 &= a_0 b + \frac{a_1 b^2}{2} + \frac{a_2 b^3}{3} + \cdots \frac{a_n b^{n+1}}{n+1} \\ S_1 &= \frac{a_0 b^2}{2} + \frac{a_1 b^3}{3} + \frac{a_2 b^3}{4} + \cdots \frac{a_n b^{n+2}}{n+2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_n &= \frac{a_0 b^{n+1}}{n+1} + \frac{a_1 b^{n+2}}{n+2} + \frac{a_2 b^{n+3}}{n+3} + \cdots \frac{a_n b^{2n+1}}{2n+1} . \end{aligned} \right. \tag{11}$$

Ora le quantità $S_0\, S_1 \dots S_n$ sono perfettamente note, come abbiamo già visto; anche la b è nota. Le (11) formano dunque un sistema di $n+1$ equazioni lineari algebriche tra le $n+1$ incognite $a_0\, a_1 \dots a_n$. Il determinante dei coefficienti D_n è dato da:

$$D_n = \begin{vmatrix} b & \frac{b^2}{2} & \frac{b^3}{3} & \cdots & \frac{b^{n+1}}{n+1} \\ \frac{b^2}{2} & \frac{b^3}{3} & \frac{b^4}{4} & \cdots & \frac{b^{n+2}}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{b^{n+1}}{n+1} & \frac{b^{n+2}}{n+2} & & \cdots & \frac{b^{2n+1}}{2n+1} \end{vmatrix} = b^{(n+1)^2} \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{vmatrix}$$

ed è quindi diverso da zero. Risolvendo allora il sistema (11) possiamo immediatamente conoscere $a_0\, a_1 \ldots a_n$; con che il problema, che ci siamo proposti, resta completamente risoluto.

6. Termineremo dimostrando che *l'errore medio* E_n *tende a zero col crescere di* n. Intanto è evidente che, se è $m > n$, si ha $E_m \leqq E_n$ giacchè Y_n può essere considerato come un particolare polinomio di ordine m in cui i primi $m - n$ coefficienti sono uguali allo zero. Poichè dunque E_n *è una funzione sempre positiva e decrescente* (o almeno non mai crescente) *di* n, è chiaro che *quando* n *tende all'infinito essa tenderà ad un limite positivo* ϱ. Avremo dunque

$$\lim_{n=\infty} E_n = \varrho \tag{12}$$

Resta ora a dimostrare che ϱ è uguale allo zero. Infatti per un n qualsiasi si ha $E_n \geqq \varrho$. Allora chiamando con μ_n il massimo valore che la quantità $|Y_n - y|$ assume nell'intervallo $b \geqq x \geqq 0$, dalla (8) risulta

$$\mu_n \geqq E_n \geqq \varrho\,. \tag{13}$$

Ma la y, secondo la nostra ipotesi, è una funzione continua. Dunque, per un teorema di Weierstrass [1], data una quantità ε piccola a piacere possiamo trovare un polinomio tale che l'errore massimo μ_n risulti minore di ε; perciò secondo la (3) dovrà essere $\varrho < \varepsilon$. Ma allora la quantità positiva ϱ, dovendo essere minore di ogni grandezza assegnabile ε, è certamente uguale allo zero. c. d. d.

Matematica. — *Derivazione intrinseca nel calcolo differenziale assoluto* [2]. Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio Tullio Levi-Civita.

È noto che i metodi del C. D. A. si basano sulla considerazione di una forma differenziale quadratica positiva

$$\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,, \tag{1}$$

che si denomina *fondamentale*, in n variabili indipendenti $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

I suoi coefficienti a_{rs}, i rispettivi elementi reciproci $a^{(rs)}$ e gli elementi differenziali sia di primo (simboli di Christoffel) che di secondo ordine (simboli di Riemann) intervengono nelle formole del C. D. A. In particolar

(1) Weierstrass, *Berliner Sitzungsberichte*, 1885. V. anche Borel, op. cit., pag. 51 e segg.

(2) Ricci et Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* [Math. Annalen, B. LIV (1900), pp. 125-201].