ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

ed è quindi diverso da zero. Risolvendo allora il sistema (11) possiamo immediatamente conoscere $a_0\, a_1 \dots a_n$; con che il problema, che ci siamo proposti, resta completamente risoluto.

6. Termineremo dimostrando che *l'errore medio* E_n *tende a zero col crescere di* n. Intanto è evidente che, se è $m > n$, si ha $E_m \leqq E_n$ giacchè Y_n può essere considerato come un particolare polinomio di ordine m in cui i primi $m - n$ coefficienti sono uguali allo zero. Poichè dunque E_n *è una funzione sempre positiva e decrescente* (o almeno non mai crescente) *di* n, è chiaro che *quando* n *tende all'infinito essa tenderà ad un limite positivo* ϱ. Avremo dunque

$$\lim_{n=\infty} E_n = \varrho \tag{12}$$

Resta ora a dimostrare che ϱ è uguale allo zero. Infatti per un n qualsiasi si ha $E_n \geqq \varrho$. Allora chiamando con μ_n il massimo valore che la quantità $|Y_n - y|$ assume nell'intervallo $b \geqq x \geqq 0$, dalla (8) risulta

$$\mu_n \geqq E_n \geqq \varrho\,. \tag{13}$$

Ma la y, secondo la nostra ipotesi, è una funzione continua. Dunque, per un teorema di Weierstrass [1], data una quantità ε piccola a piacere possiamo trovare un polinomio tale che l'errore massimo μ_n risulti minore di ε; perciò secondo la (3) dovrà essere $\varrho < \varepsilon$. Ma allora la quantità positiva ϱ, dovendo essere minore di ogni grandezza assegnabile ε, è certamente uguale allo zero. c. d. d.

Matematica. — *Derivazione intrinseca nel calcolo differenziale assoluto* [2]. Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio Tullio Levi-Civita.

È noto che i metodi del C. D. A. si basano sulla considerazione di una forma differenziale quadratica positiva

$$\varphi = \sum_1^n{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s\,, \tag{1}$$

che si denomina *fondamentale*, in n variabili indipendenti $x_1, x_2, \dots, x_n$.

I suoi coefficienti a_{rs}, i rispettivi elementi reciproci $a^{(rs)}$ e gli elementi differenziali sia di primo (simboli di Christoffel) che di secondo ordine (simboli di Riemann) intervengono nelle formole del C. D. A. In particolar

[1] Weierstrass, *Berliner Sitzungsberichte*, 1885. V. anche Borel, op. cit., pag. 51 e segg.

[2] Ricci et Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* [Math. Annalen, B. LIV (1900), pp. 125-201].

modo intervengono i simboli di Christoffel di seconda specie $\left\{ \begin{matrix} r\,s \\ t \end{matrix} \right\}$ nelle operazioni di derivazione covariante e di derivazione controvariante secondo la forma φ. Infatti, se $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$ $(r_1, r_2, \dots, r_m = 1, 2, \dots, n)$ sono gli elementi di un sistema di funzioni (di $x_1, x_2, \dots, x_n$) covariante e di ordine m, il suo *sistema derivato* (*covariantemente*) *secondo la forma* φ ha per elementi [1]

$$\text{(I)} \qquad X_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} = \frac{\partial X_{r_1 r_2 \dots r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} - \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_q \left\{ \begin{matrix} r_l\, r_{m+1} \\ q \end{matrix} \right\} X_{r_1 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m} .$$

Se invece $X^{(r_1 r_2 \dots r_m)}$ rappresentano gli elementi del sistema reciproco di $X_{r_1 r_2 \dots r_m}$, rispetto alla forma φ, e quindi costituenti un sistema controvariante dello stesso ordine [2], gli elementi del primo *sistema derivato* (*controvariantemente*) *secondo* φ sono [3]

$$\text{(I}_1\text{)} \qquad X^{(r_1 r_2 r_m \dots r_{m+1})} = \sum_1^n {}_t\, a^{(t r_{m+1})} \left\{ \frac{\partial X^{(r_1 r_2 \dots r_m)}}{\partial x_t} + \right.$$
$$\left. + \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_q \left\{ \begin{matrix} t\, q \\ r_l \end{matrix} \right\} X^{(r_1 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m)} \right\}.$$

Scopo della presente Nota è di introdurre un' unica operazione di derivazione, equivalente tanto alla derivazione covariante (I), quanto alla derivazione controvariante (I_1). Lo scopo si raggiunge se agli elementi covarianti o controvarianti che definiscono i sistemi dati si sostituiscono degli invarianti. Giova a tal uopo riferirsi ad una ennupla generica di congruenze ortogonali [4] $[1], [2], \dots, [n]$. Chiamando, come è consuetudine, con $1, 2, \dots, n$ le linee corrispondenti, sieno $\lambda_h^{(k)}$, $\lambda_{h/k}$ $(h, k = 1, 2, \dots, n)$ i sistemi coordinati controvariante e covariante della congruenza $[h]$. Posto

$$\text{(2)} \qquad J_{r_1 r_2 \dots r_m} = \sum_1^n {}_{h_1 h_2 \dots h_m} X_{h_1 h_2 \dots h_m} \lambda_{r_1}^{(h_1)} \lambda_{r_2}^{(h_2)} \dots \lambda_{r_m}^{(h_m)},$$

ovvero — ciò che è equivalente —

$$\text{(2')} \qquad J_{r_1 r_2 \dots r_m} = \sum_1^n {}_{h_1 h_2 \dots h_m} X^{(h_1 h_2 \dots h_m)} \lambda_{r_1/h_1} \lambda_{r_2/h_2} \dots \lambda_{r_m/h_m},$$

tanto le (I) quanto le (I_1) sono equivalenti alle seguenti:

$$\text{(I')} \qquad J_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} = \frac{dJ_{r_1 r_2 \dots r_m}}{ds_{r_{m+1}}} - \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_q \gamma_{r_l q r_{m+1}} J_{r_1 r_2 \dots r_{l-1} q r_{l+1} \dots r_m},$$

(1) Loc. cit., pag. 138, formola (19).
(2) Loc. cit., pag. 134.
(3) Loc. cit., pag. 140, formola (20).
(4) Loc. cit., Cap. II, § 1.

dove $ds_{r_{m+1}}$ è l'elemento d'arco delle linee della congruenza $[r_{m+1}]$ e

$$(3) \qquad \gamma_{r_l q r_{m+1}} = -\gamma_{q r_l r_{m+1}} = \sum_1^n {}_{hk} \lambda_q^{(h)} \lambda_{r_{m+1}}^{(k)} \lambda_{r_l/hk}$$

sono i *coefficienti di rotazione di Ricci* [1] ($\lambda_{r_l/hk}$ essendo gli elementi del primo sistema derivato covariantemente secondo φ dal sistema di elementi $\lambda_{r_l/h}$). Le (I') hanno il vantaggio, sulle originarie formole di derivazione (I) e (I_1), che gli elementi che in esse compariscono sono invarianti. Ciò giustifica la qualifica di *intrinseca* che attribuisco alla regola di derivazione contenuta nelle (I'). È degna di rilievo la circostanza che in questa derivazione i coefficienti di rotazione di Ricci hanno lo stesso ufficio dei simboli di Christoffel (di seconda specie) nella derivazione covariante: ciò scende in modo immediato dal confronto delle (I') colle (I).

Come conseguenza delle (I) si deducono le seguenti identità tra gli elementi $X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1} r_{m+2}}$ del secondo sistema derivato da $X_{r_1 r_2 \ldots r_m}$ [2]:

$$(\mathrm{II}) \qquad X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+2} r_{m+1}} - X_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1} r_{m+2}} =$$
$$= \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_{pq} a^{(pq)} a_{r_{m+1} r_{m+2}, r_l p} X_{r_1 \ldots r_{l-1} q r_{l+1} \ldots r_m},$$

dove $a_{r_{m+1} r_{m+2}, r_l p}$ sono i simboli di Riemann di prima specie.

La derivazione intrinseca conduce invece alle seguenti identità equivalenti a quelle che precedono:

$$(\mathrm{II}') \qquad J_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+2} r_{m+1}} - J_{r_1 r_2 \ldots r_m r_{m+1} r_{m+2}} =$$
$$= \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_p \gamma_{r_{m+1} r_{m+2}, r_l p} J_{r_1 \ldots r_{l-1} p r_{l+1} \ldots r_m},$$

dove $\gamma_{r_{m+1} r_{m+2}, r_l p}$ sono gli invarianti di secondo ordine legati a quelli di primo ordine, definiti dalle (3), dalle relazioni

$$(4) \qquad \gamma_{r_{m+1} r_{m+2}, r_l p} = \frac{\partial \gamma_{r_{m+1} r_{m+2} r_l}}{\partial s_p} - \frac{\partial \gamma_{r_{m+1} r_{m+2} p}}{\partial s_{r_l}} +$$
$$+ \sum_1^n {}_j \left\{ \gamma_{r_{m+1} r_{m+2} j} (\gamma_{j r_l p} - \gamma_{j p r_l}) + \gamma_{j r_{m+1} p} \gamma_{j r_{m+2} r_l} - \gamma_{j r_{m+1} r_l} \gamma_{j r_{m+2} p} \right\},$$

e ai simboli di Riemann (di prima specie) dalle relazioni [3]

$$(5) \qquad \gamma_{r_{m+1} r_{m+2}, r_l p} = \sum_1^n {}_{qrst} a_{qr, st} \lambda_{r_{m+1}}^{(q)} \lambda_{r_{m+2}}^{(r)} \lambda_{r_l}^{(s)} \lambda_p^{(t)}.$$

(1) Loc. cit., pag. 148.

(2) Loc. cit., pag. 143, formola (23). Il prof. Levi Civita cortesemente mi fa rilevare che il primo membro delle (23) va cambiato di segno. Si tratta di un errore materiale sfuggito agli A. nella correzione delle bozze, e che non ha naturalmente conseguenza nel seguito.

(3) Loc. cit., pag. 157, formole (20) e (21).

1. Che le (I′) sieno conseguenza delle (I) si può dimostrare nel modo seguente. Cambiati nelle (I) $r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}$ in $h_1 h_2 \dots h_m h_{m+1}$, si moltiplichino entrambi i membri per $\lambda_{r_1}^{(h_1)} \lambda_{r_2}^{(h_2)} \dots \lambda_{r_m}^{(h_m)} \lambda_{r_{m+1}}^{(h_{m+1})}$, indi si sommi rispetto agli indici $h_1 h_2 \dots h_m h_{m+1}$ da 1 fino a n; tenendo conto delle (2) si ottiene:

$$(6)\quad \mathrm{J}_{r_1 r_2 \dots r_m r_{m+1}} = \sum_1^n {}_{h_1 h_2 \dots h_m h_{m+1}} \frac{\partial \mathrm{X}_{h_1 h_2 \dots h_m}}{\partial x_{h_{m+1}}} \lambda_{r_1}^{(h_1)} \lambda_{r_2}^{(h_2)} \dots \lambda_{r_m}^{(h_m)} \lambda_{r_{m+1}}^{(h_{m+1})} -$$

$$- \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_{q h_1 h_2 \dots h_m h_{m+1}} \left\{ \begin{matrix} h_l\, h_{m+1} \\ q \end{matrix} \right\} \mathrm{X}_{h_1 \dots h_{l-1} q h_{l+1} \dots h_m} \lambda_{r_1}^{(h_1)} \dots \lambda_{r_m}^{(h_m)} \lambda_{r_{m+1}}^{(h_{m+1})}.$$

Avendosi

$$\lambda_{r_{m+1}}^{(h_{m+1})} = \frac{d x_{h_{m+1}}}{d s_{r_{m+1}}},$$

e quindi

$$\sum_1^n {}_{h_{m+1}} \frac{\partial \mathrm{X}_{h_1 h_2 \dots h_m}}{\partial x_{h_{m+1}}} \lambda_{r_{m+1}}^{(h_{m+1})} = \sum_1^n {}_{h_{m+1}} \frac{\partial \mathrm{X}_{h_1 h_2 \dots h_m}}{\partial x_{h_{m+1}}} \frac{d x_{h_{m+1}}}{d s_{r_{m+1}}} = \frac{d \mathrm{X}_{h_1 h_2 \dots h_m}}{d s_{r_{m+1}}},$$

la prima sommatoria del secondo membro della (6) si trasforma in

$$(7)\quad \sum_1^n {}_{h_1 h_2 \dots h_m} \frac{d \mathrm{X}_{h_1 h_2 \dots h_m}}{d s_{r_{m+1}}} \lambda_{r_1}^{(h_1)} \lambda_{r_2}^{(h_2)} \dots \lambda_{r_m}^{(h_m)}.$$

Dalla (2), moltiplicando per $\lambda_{k_1/h_1} \lambda_{k_2/h_2} \dots \lambda_{k_m/h_m}$, dopo aver cambiato gli indici $r_1 r_2 \dots r_m$ in $k_1 k_2 \dots k_m$, indi sommando rispetto a $k_1 k_2 \dots k_m$ si ottiene

$$\mathrm{X}_{h_1 h_2 \dots h_m} = \sum_1^n {}_{k_1 k_2 \dots k_m} \mathrm{J}_{k_1 k_2 \dots k_m} \lambda_{k_1/h_1} \lambda_{k_2/h_2} \dots \lambda_{k_m/h_m},$$

per cui

$$(8)\quad \frac{d \mathrm{X}_{h_1 h_2 \dots h_m}}{d s_{r_{m+1}}} = \sum_1^n {}_{k_1 k_2 \dots k_m} \frac{d \mathrm{J}_{k_1 k_2 \dots k_m}}{d s_{r_{m+1}}} \lambda_{k_1/h_1} \lambda_{k_2/h_2} \dots \lambda_{k_m/h_m} +$$

$$+ \sum_1^n {}_{k_1 k_2 \dots k_m} \mathrm{J}_{k_1 k_2 \dots k_m} \sum_1^m {}_l \lambda_{k_1/h_1} \lambda_{k_2/h_2} \dots \lambda_{k_{l-1}/h_{l-1}} \lambda_{k_{l+1}/h_{l+1}} \dots \lambda_{k_m/h_m} \frac{d \lambda_{k_l/h_l}}{d s_{r_{m+1}}}.$$

Ma è

$$\frac{d \lambda_{k_l/h_l}}{d s_{r_{m+1}}} = \sum_1^n {}_q \frac{d \lambda_{k_l/h_l}}{d x_q} \lambda_{r_{m+1}}^{(q)}.$$

Tenendo conto di questa, delle condizioni di ortogonalità

$$(9)\quad \sum_1^n {}_r \lambda_h^{(r)} \lambda_{k/r} = \varepsilon_{hk} = \begin{cases} 1 & h = k, \\ 0 & h \neq k, \end{cases}$$

e della (8), l'espressione (7) della prima sommatoria del secondo membro della (6) diviene

$$(7')\quad \frac{d \mathrm{J}_{r_1 r_2 \dots r_m}}{d s_{r_{m+1}}} + \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_{pqt} \mathrm{J}_{r_1 \dots r_{l-1} p r_{l+1} \dots r_m} \lambda_{r_l}^{(t)} \lambda_{r_{m+1}}^{(q)} \frac{d \lambda_{p/t}}{d x_q}.$$

Ma per la (I) (per $m=1$) si ha

$$\frac{d\lambda_{p/t}}{dx_q} = \lambda_{p/tq} + \sum_1^n {}_k \left\{ \begin{matrix} t\,q \\ k \end{matrix} \right\} \lambda_{p/k},$$

d'altra parte dalla (3) si ricava

$$\lambda_{p/tq} = -\sum_1^n {}_{ij} \gamma_{ipj} \lambda_{i/t} \lambda_{j/q},$$

per cui la (7′) tenuto conto di (9) diviene ancora

$$(7'') \quad \frac{dJ_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{ds_{r_{m+1}}} - \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_p \gamma_{r_l p r_{m+1}} J_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1} p r_{l+1} \ldots r_m} + \\ + \sum_1^m {}_l \sum_1^n {}_{kpqt} \left\{ \begin{matrix} t\,q \\ k \end{matrix} \right\} J_{r_1 \ldots r_{l-1} p r_{l+1} \ldots r_m} \lambda_{p/k} \lambda_{r_l}^{(t)} \lambda_{r_{m+1}}^{(q)}.$$

Quest'ultima sommatoria, per le (2) e tenuto conto delle (9), facilmente si verifica che eguaglia l'ultima sommatoria del secondo membro delle (6); per cui portando nella prima sommatoria del secondo membro delle (6) la sua espressione equivalente (7″) si ottiene senz'altro (I′), c. v. d.

Con procedimento inverso da (I′) si ricava (I), pertanto (I′) è equivalente a (I).

Con criterio analogo partendo da (I_1) e tenendo conto delle (2′) si può constatare l'equivalenza di (I_1) é (I′).

In quanto alle identità (II′) esse possono dedursi sia direttamente applicando la regola di derivazione contenuta in (I′), sia con procedimento analogo a quello precedentemente sviluppato partendo dalle identità covarianti (II).

Matematica. — *Problemi dinamici a due variabili che ammettono un integrale razionale lineare e fratto rispetto alle componenti della velocità.* Nota del dott. E. de Cristofaro, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

1. Considerando il caso in cui nel moto di un punto in un piano esiste un integrale della forma:

$$\frac{A_1 x' + B_1 y' + D_1}{A_2 x' + B_2 y' + D_2} = h,$$

dove $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ sono funzioni finite determinate e ad un sol valore delle coordinate x, y del punto mobile; x', y' le componenti della velocità ed h una costante, il Bertrand [1], pervenne alla determinazione

[1] *Mémoire sur quelques-unes des formes les plus simples que puissent présenter les intégrales des équations différentielles du mouvement d'un point matériel*, Journal de mathématiques, ser. 2ª, tomo 2 (1857).