ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Ma per la (I) (per $m=1$) si ha

$$\frac{d\lambda_{p/t}}{dx_q}=\lambda_{p/tq}+\sum_{1}^{n}{}_k \left\{ \begin{matrix} t\,q \\ k \end{matrix} \right\} \lambda_{p/k}\,,$$

d'altra parte dalla (3) si ricava

$$\lambda_{p/tq}=-\sum_{1}^{n}{}_{ij}\,\gamma_{ipj}\,\lambda_{i/t}\,\lambda_{j/q}\,,$$

per cui la (7′) tenuto conto di (9) diviene ancora

$$(7'') \qquad \frac{d\mathrm{J}_{r_1 r_2 \ldots r_m}}{ds_{r_{m+1}}}-\sum_{1}^{m}{}_l \sum_{1}^{n}{}_p\, \gamma_{r_l p\, r_{m+1}}\, \mathrm{J}_{r_1 r_2 \ldots r_{l-1}\, p\, r_{l+1} \ldots r_m}+ \\ +\sum_{1}^{m}{}_l \sum_{1}^{n}{}_{kpqt} \left\{ \begin{matrix} t\,q \\ k \end{matrix} \right\} \mathrm{J}_{r_1 \ldots r_{l-1}\, p\, r_{l+1} \ldots, r_m}\, \lambda_{p/k}\, \lambda^{(t)}_{r_l}\, \lambda^{(q)}_{r_{m+1}}\,.$$

Quest'ultima sommatoria, per le (2) e tenuto conto delle (9), facilmente si verifica che eguaglia l'ultima sommatoria del secondo membro delle (6); per cui portando nella prima sommatoria del secondo membro delle (6) la sua espressione equivalente (7″) si ottiene senz'altro (I′), c. v. d.

Con procedimento inverso da (I′) si ricava (I), pertanto (I′) è equivalente a (I).

Con criterio analogo partendo da (I_1) e tenendo conto delle (2′) si può constatare l'equivalenza di (I_1) é (I′).

In quanto alle identità (II′) esse possono dedursi sia direttamente applicando la regola di derivazione contenuta in (I′), sia con procedimento analogo a quello precedentemente sviluppato partendo dalle identità covarianti (II).

Matematica. — *Problemi dinamici a due variabili che ammettono un integrale razionale lineare e fratto rispetto alle componenti della velocità.* Nota del dott. E. de Cristofaro, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

1. Considerando il caso in cui nel moto di un punto in un piano esiste un integrale della forma:

$$\frac{\mathrm{A}_1 x'+\mathrm{B}_1 y'+\mathrm{D}_1}{\mathrm{A}_2 x'+\mathrm{B}_2 y'+\mathrm{D}_2}=h\,,$$

dove $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{B}_2, \mathrm{C}_2$ sono funzioni finite determinate e ad un sol valore delle coordinate x, y del punto mobile; x', y' le componenti della velocità ed h una costante, il Bertrand [1], pervenne alla determinazione

[1] *Mémoire sur quelques-unes des formes les plus simples que puissent présenter les intégrales des équations différentielles du mouvement d'un point matériel*, Journal de mathématiques, ser. 2ª, tomo 2 (1857).

dei coefficienti che risultano della forma

$$A_1 = a_{33} - a_{31}\,y \quad , \quad A_2 = a_{23} - a_{21}\,y$$
$$B_1 = a_{32} + a_{31}\,x \quad , \quad B_2 = a_{22} + a_{21}\,x$$

mentre D_1 e D_2 risultano determinate da due equazioni del tipo:

$$(1) \qquad \begin{cases} A_2\,D_1 - A_1\,D_2 = a_{13} - a_{11}\,y \\ B_2\,D_1 - B_1\,D_2 = a_{12} + a_{11}\,x\,, \end{cases}$$

in cui le a sono costanti.

Se poi poniamo: $A = \sum \pm a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$, ed indichiamo con α_{ij} il complemento algebrico di a_{ij}, il determinante $\triangle$ del sistema (1) è:

$$\triangle = \alpha_{11} - \alpha_{12}\,x + \alpha_{13}\,y\,;$$

e le forze risultano determinate dalle due equazioni

$$(2) \qquad \begin{cases} \triangle^3\,X = \alpha_{33}\,R + \alpha_{23}\,S = A(a_{12} + a_{11}\,x) \\ \triangle^3\,Y = \alpha_{22}\,S + \alpha_{32}\,R = A(-\,a_{13} + a_{11}\,y) \end{cases}$$

in cui

$$R = \triangle D_1 = -\,\alpha_{21} + \alpha_{22}\,x - \alpha_{23}\,y$$
$$S = \triangle D_2 = \alpha_{31} - \alpha_{32}\,x + \alpha_{33}\,y\,.$$

2. Ora la ricerca del Bertrand può essere completata e si riesce a caratterizzare in modo assai semplice ed elegante i problemi in questione mercè un teorema enunciato dal Cerruti [1].

Anzitutto è facile provare, che il problema è uno dei notissimi. Consideriamo le rette

$$R = 0 \quad , \quad S = 0$$

il cui punto d'incontro M_0, supposto $a_{11} \neq 0$, ha le coordinate

$$x_0 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \quad , \quad y_0 = \frac{a_{13}}{a_{11}}\,.$$

Sostituendo nelle (2) si ha

$$\triangle^3\,X = a_{11}\,A\left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}\right) = a_{11}\,A(x - x_0)$$
$$\triangle^3\,Y = a_{11}\,A\left(y - \frac{a_{13}}{a_{11}}\right) = a_{11}\,A(y - y_0)\,;$$

e però la forza, di componenti X, Y, è diretta verso il punto M_0.

Il problema è dunque uno dei notissimi in cui la forza è centrale.

[1] Questo teorema fu comunicato, senza dimostrazione, dal Cerruti al prof. Marcolongo molti anni or sono; di esso non pare siasi trovata notizia tra le carte lasciate dall'illustre scienziato.

Se fosse $a_{11} = 0$ le due rette $R = 0$, $S = 0$ risulterebbero parallele fra di loro e la forza sarebbe quindi parallela ad una direzione fissa.

Nell'ipotesi che sia $a_{11} \neq 0$, assumiamo la $S = 0$ come asse delle x ed il punto M_0 come origine delle coordinate. Risulta perciò

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0 ;$$

e quindi posto

$$a_{22} \cdot a_{33} = \nu \quad , \quad a_{21} \cdot a_{33} = \lambda \quad , \quad a_{12} = \mu$$

risulta

$$A = a_{11} \cdot \nu \quad , \quad R = a_{11}(a_{33} x + a_{32} y) \quad , \quad S = a_{11} \cdot a_{22} y \, ,$$
$$\Delta = \nu + \lambda x + \mu y \, ,$$

mentre dalle (2) si ricava

$$(3) \qquad X = \frac{a_{11}^2 \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot x}{\Delta^3} = \frac{a_{11}^2 \nu x}{\Delta^3} \quad , \quad Y = \frac{a_{11}^2 \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot y}{\Delta^3} = \frac{a_{11}^2 \nu y}{\Delta^3} \, .$$

Facciamo ora una trasformazione omografica ponendo:

$$(4) \qquad \xi = \frac{x}{\Delta} \quad , \quad \eta = \frac{y}{\Delta} \quad , \quad k \, d\tau = \frac{dt}{\Delta^2} \, .$$

Si ha agevolmente:

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = k(\Delta x' - x\Delta') = k[\nu x' - \mu(xy' - x'y)] \\[2ex] \dfrac{d\eta}{d\tau} = k(\Delta y' - y\Delta') = k[\nu y' + \lambda(xy' - x'y)] . \end{cases}$$

Moltiplicando la prima per η, la seconda per ξ e sottraendo membro a membro, e osservando le (4), si ha

$$(6) \qquad \xi \frac{d\eta}{d\tau} - \eta \frac{d\xi}{d\tau} = k(xy' - x'y) \, .$$

Per la derivata seconda di ξ rispetto a τ si ha:

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = k^2 \Delta^2 \{ \nu x'' - \mu(xy'' - x''y) \} \, ,$$

ma $xy'' - x''y = 0$ perchè il moto nel quale le variabili sono x ed y è centrale, quindi si hanno le equazioni

$$(7) \qquad \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = k^2 \Delta^2 \nu x'' \quad , \quad \frac{d^2\eta}{d\tau^2} = k^2 \Delta^2 \nu y'' \, .$$

Esse ci dànno facilmente, per le (3):

$$\xi \frac{d^2\eta}{d\tau^2} - \eta \frac{d^2\xi}{d\tau^2} = 0$$

e però anche *il moto del problema trasformato è centrale.*

3. Dopo ciò è facile trovare le equazioni nel problema trasformato.

Infatti, le equazioni del moto primitivo sono (posta eguale ad 1 la massa):

$$X = x'' \quad , \quad Y = y''$$

cioè per le (3), (4)

$$x'' = \frac{a_{11}^2 \nu}{\Delta^2} \xi \quad . \quad y'' = \frac{a_{11}^2 \nu}{\Delta^2} \eta$$

onde, posto

$$\omega = a_{11} k \nu$$

le (7) assumono la forma

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \omega^2 \xi \quad , \quad \frac{d^2\eta}{d\tau^2} = \omega^2 \eta \; ; \tag{8}$$

e queste *sono le equazioni notissime del moto di un punto respinto dall'origine in ragione diretta della distanza.*

4. Vediamo ora qual'è la forma dell'integrale algebrico razionale fratto del primo problema.

I valori dei coefficienti sono:

$$A_1 = a_{33} - a_{31} y \quad , \quad B_1 = a_{32} + a_{31} x \quad , \quad \Delta D_1 = a_{11}(a_{33} x + a_{32} y)$$
$$A_2 = a_{23} - a_{21} y \quad , \quad B_2 = a_{22} + a_{21} x \quad , \quad \Delta D_2 = a_{11}(a_{23} x + a_{22} y) .$$

sicchè risulta

$$\frac{A_1 x' + B_1 y' + D_1}{A_2 x' + B_2 y' + D_2} = \frac{a_{33} x' + a_{32} y' + a_{31}(xy' - x'y) + \frac{a_{11}}{\Delta}(a_{33} x + a_{32} y)}{a_{23} x' + a_{22} y' + a_{21}(xy' - x'y) + \frac{a_{11}}{\Delta}(a_{23} x + a_{22} y)} = h$$

in cui, a denominatore, per maggiore simmetria si è ritenuto ancora a_{23} il che equivale a non fissare la posizione dell'asse y.

In tale caso è

$$a_{22} . a_{33} - a_{23} . a_{32} = \alpha_{11} = \nu \quad , \quad a_{21} . a_{33} - a_{23} . a_{31} = - \alpha_{12} = \lambda \, ,$$
$$a_{21} . a_{32} - a_{22} . a_{31} = \alpha_{13} = \mu \; ;$$

e per le (4)

$$\frac{a_{11}}{\Delta}(a_{33} x + a_{32} y) = a_{11}(a_{33} \xi + a_{32} \eta) \; , \; \frac{a_{11}}{\Delta}(a_{23} x + a_{22} y) = a_{11}(a_{23} \xi + a_{22} \eta) .$$

Indicando con ξ', η' le derivate prime di ξ, η rispetto a τ, dalle (5) e (6) si ricava:

$$k\alpha_{11}x' = \xi' + \alpha_{13}(\xi\eta' - \eta\xi') \quad , \quad k\alpha_{11}y' = \eta' + \alpha_{12}(\xi\eta' - \xi'\eta)$$

e conseguentemente

$$k\alpha_{11}[a_{33}x' + a_{32}y' + a_{31}(xy' - x'y)] = a_{33}\xi' + a_{32}\eta',$$

giacchè, per una nota proprietà dei determinanti, risulta

$$a_{33}\alpha_{13} + a_{32}\alpha_{12} + a_{31}\alpha_{11} = 0\,;$$

del pari

$$k\alpha_{11}[a_{23}x' + a_{22}y' + a_{21}(xy' - x'y)] = a_{23}\xi' + a_{22}\eta'.$$

Quindi la forma ultima dell' integrale nel problema trasformato è

$$\frac{a_{33}\xi' + a_{32}\eta' + \omega(a_{33}\xi + a_{32}\eta)}{a_{23}\xi' + a_{22}\eta' + \omega(a_{23}\xi + a_{22}\eta)} = h.$$

Ed è facile verificare che in virtù degli integrali delle (8)

$$\text{(9)} \qquad \xi = \beta\,\mathrm{Ch}\,\omega\tau + \gamma\,\mathrm{Sh}\,\omega\tau \quad , \quad \eta = \delta\,\mathrm{Ch}\,\omega\tau + \varepsilon\,\mathrm{Sh}\,\omega\tau$$

in cui $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sono costanti, si ha subito

$$\frac{a_{33}\xi' + a_{32}\eta' + \omega(a_{33}\xi + a_{32}\eta)}{a_{23}\xi' + a_{22}\eta' + \omega(a_{23}\xi + a_{22}\eta)} = \frac{a_{33}(\beta+\gamma) + a_{32}(\delta+\varepsilon)}{a_{23}(\beta+\gamma) + a_{22}(\delta+\varepsilon)} = \text{cost.}$$

5. Dalle relazioni

$$\Delta = \alpha_{11} - \alpha_{12}x + \alpha_{13}y \quad , \quad \xi = \frac{x}{\Delta} \quad , \quad \eta = \frac{y}{\Delta}$$

si ricava

$$\Delta = \frac{\alpha_{11}}{1 + \alpha_{12}\xi - \alpha_{13}\eta}\,;$$

sostituendo in

$$k\,d\tau = \frac{dt}{\Delta^2}$$

e risolvendo rispetto a dt

$$dt = \frac{k\alpha_{11}^2\,d\tau}{(1 + \alpha_{12}\xi - \alpha_{13}\eta)^2}$$

da cui, con una quadratura, troviamo t espresso mediante τ.

Inoltre, poichè conosciamo gl' integrali del problema nel quale le variabili sono ξ, η potremo trovare tutti gli integrali del problema in cui le variabili sono x ed y. Resta dunque provato il seguente teorema del Cerruti:

Trasformando con le formole

$$\xi = \frac{x}{\Delta} \quad , \quad \eta = \frac{y}{\Delta} \quad , \quad dt = k\Delta^2 . d\tau$$

il problema del moto di un punto attratto da un centro fisso proporzionatamente alla distanza, si ottengono tutti quei problemi di meccanica che ammettono un integrale della forma

$$\frac{A_1 x' + B_1 y' + D_1}{A_2 x' + B_2 y' + D_2} = \text{cost.}$$

Il teorema però, non vale più nel caso di tre variabili, come sarà mostrato in un prossimo lavoro.

Matematica. — *Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio.* Nota I di D. Montesano, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

Uno degli argomenti più importanti trattati da Cremona nelle sue classiche ricerche su le corrispondenze birazionali dello spazio, riguarda le linee fondamentali di 2ª specie, le linee cioè basi dell'uno o dell'altro dei due sistemi omaloidici collegati alla corrispondenza che non sono segate fuori del gruppo dei punti fondamentali dalle linee basi variabili dei fasci del sistema.

Cremona, fondandosi sull'esame dei tipi particolari di corrispondenze sino allora noti, affermò che due linee fondamentali di 2ª specie omologhe godono la proprietà che la multiplicità di una delle due linee pel sistema omaloidico di cui è base, è eguale all'ordine dell'altra.

Tutti i geometri che dopo Cremona ebbero ad occuparsi in qualunque modo dell'argomento, ritennero vera ed enunciarono senza alcuna restrizione la proprietà indicata, non prendendo in esame la parte sostanziale della quistione che consiste nel ricercare le particolarità che acquista la rete di superficie omologa in uno dei due spazî ad una stella dei piani dell'altro spazio che ha il centro in un punto generico di una linea fondamentale di 2ª specie (¹).

Ora il teorema indicato non regge in ogni caso, perchè in generale per due linee fondamentali di 2ª specie omologhe accade che *la multiplicità di una di esse per il sistema omaloidico di cui è base, è un multiplo del-*

(¹) Veggasi fra gli altri Sturm, *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften*, vol. IV, pag. 342.