ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Trasformando con le formole

$$\xi = \frac{x}{\Delta} \quad , \quad \eta = \frac{y}{\Delta} \quad , \quad dt = k\Delta^2 . d\tau$$

il problema del moto di un punto attratto da un centro fisso proporzionatamente alla distanza, si ottengono tutti quei problemi di meccanica che ammettono un integrale della forma

$$\frac{A_1 x' + B_1 y' + D_1}{A_2 x' + B_2 y' + D_2} = \text{cost.}$$

Il teorema però, non vale più nel caso di tre variabili, come sarà mostrato in un prossimo lavoro.

Matematica. — *Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio.* Nota I di D. Montesano, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

Uno degli argomenti più importanti trattati da Cremona nelle sue classiche ricerche su le corrispondenze birazionali dello spazio, riguarda le linee fondamentali di 2ª specie, le linee cioè basi dell'uno o dell'altro dei due sistemi omaloidici collegati alla corrispondenza che non sono segate fuori del gruppo dei punti fondamentali dalle linee basi variabili dei fasci del sistema.

Cremona, fondandosi sull'esame dei tipi particolari di corrispondenze sino allora noti, affermò che due linee fondamentali di 2ª specie omologhe godono la proprietà che la multiplicità di una delle due linee pel sistema omaloidico di cui è base, è eguale all'ordine dell'altra.

Tutti i geometri che dopo Cremona ebbero ad occuparsi in qualunque modo dell'argomento, ritennero vera ed enunciarono senza alcuna restrizione la proprietà indicata, non prendendo in esame la parte sostanziale della quistione che consiste nel ricercare le particolarità che acquista la rete di superficie omologa in uno dei due spazî ad una stella dei piani dell'altro spazio che ha il centro in un punto generico di una linea fondamentale di 2ª specie [1].

Ora il teorema indicato non regge in ogni caso, perchè in generale per due linee fondamentali di 2ª specie omologhe accade che *la multiplicità di una di esse per il sistema omaloidico di cui è base, è un multiplo del-*

[1] Veggasi fra gli altri Sturm, *Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften*, vol. IV, pag. 342.

l'ordine dell'altra, secondo un numero intero k che soltanto in casi particolari ha il valore 1.

In questa Nota ed in un'altra che le farà seguito, sono indicati tipi assai semplici di corrispondenze nelle quali il numero k ha valore arbitrario.

In successive pubblicazioni farò noti altri nuovi risultati ottenuti nelle mie lezioni sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio, teoria per la quale tuttora possono ripetersi le parole scritte 22 anni or sono dal Loria [1]:

« Malgrado il grande valore degli scritti con cui l'Inghilterra, l'Italia « e la Germania contribuirono a fondare e svolgere la teoria delle corrispon- « denze univoche tra due spazî, non si può dire che questa abbia raggiunto « quel grado di perfezione che altre conseguirono e a cui essa poteva giu- « stamente aspirare; ciò forse dipende dal fatto che la soluzione delle più « ardue e delicate questioni ad essa collegate dipende dalla determinazione « della natura e dal numero delle singolarità delle superficie, determinazione « che offre delle difficoltà che non furono ancora vinte. Da ciò forse la spie- « gazione del fatto che i geometri posteriori a quelli citati si occuparono « più di illustrare i metodi dei grandi maestri summentovati che di perfe- « zionarli e completarli ».

1. Nello spazio data una omografia Ω, si assumano due fasci di quadriche corrispondenti Φ, Φ' che abbiano per basi l'uno una cubica o_3 ed una corda o di tale linea, l'altro la cubica o'_3 e la corda o' omologhe delle predette linee nella Ω.

Quindi si assegni un sistema razionale Σ di proiettività intercedenti fra le punteggiate (o), (o') e si supponga che il sistema sia riferito proiettivamente ai fasci Φ, Φ'.

Il procedimento più semplice per ottenere tale sistema, è noto. Basta fissare nello spazio due schiere rigate incidenti ϱ, ϱ' e riferire proiettivamente la schiera ϱ alla punteggiata (o) e la schiera ϱ' alla punteggiata (o'). Con ciò ogni proiettività fra le punteggiate (o), (o') determina una proiettività fra le schiere ϱ, ϱ' e però individua un punto O dello spazio, vertice del cono inviluppato dai piani sostegni delle coppie di generatrici omologhe delle due schiere; e viceversa.

Perciò se si assegna nello spazio una curva razionale s fuori della quadrica sostegno delle due schiere e si riferiscono proiettivamente i punti O della curva s alle quadriche omologhe π_2, π'_2 dei fasci Φ, Φ', le proiettività fra le (o), (o'), coordinate a questi punti O, costituiranno un sistema Σ soddisfacente alle condizioni indicate.

[1] Loria, *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche*, Torino, 1896, pag. 252.

Se la curva s è di ordine $k \geqq 1$, una retta p della schiera ϱ ed una retta p' della schiera ϱ' saranno in un piano che segherà la curva s in k punti. Corrispondentemente un punto generico P della o ed un punto generico P' della o' saranno omologhi in k corrispondenze del sistema Σ.

Inoltre la curva s sega la quadrica sostegno delle schiere ϱ, ϱ' in $2k$ punti. Corrispondentemente nel sistema Σ vi saranno $2k$ proiettività degeneri.

Ciò posto, si assumano nei fasci Φ, Φ' due quadriche omologhe arbitrarie π_2, π'_2. Le schiere α, α' delle due quadriche che contengono rispettivamente le o, o', corrispondendosi nella omografia Ω, risultano riferite fra di loro con proiettività nella quale risultano omologhe le o, o'. Così fra le schiere β, β' opposte alle precedenti resta determinata una proiettività nella quale due generatrici omologhe si appoggiano alle o, o' in punti corrispondenti nella proiettività del sistema Σ omologa delle quadriche π_2, π'_2.

E le due proiettività indicate che si hanno, l'una fra le α, α', l'altra fra le β, β', determinano una corrispondenza omografica fra i punti delle quadriche π_2, π'_2.

Col variare delle due quadriche nei fasci Φ, Φ', ne risulta una corrispondenza birazionale X fra i punti dello spazio S, sostegno del fascio Φ, e i punti dello spazio S', sostegno del fascio Φ'.

La genesi assai semplice di tale corrispondenza permette di stabilirne facilmente le proprietà caratteristiche.

2. Una qualsiasi delle $2k$ proiettività degeneri del sistema Σ abbia i punti singolari R, R' e sia omologa della coppia di quadriche ϱ_2, ϱ'_2 dei fasci Φ, Φ'. Sulle due quadriche le schiere α, α' che contengono rispettivamente le o, o', si corrisponderanno nella X con proiettività ordinaria, mentre le schiere opposte β, β' si corrisponderanno nella X con proiettività degenere avente per raggi singolari i raggi r, r' delle due schiere che passano rispettivamente per i punti R, R'.

Perciò queste rette saranno linee fondamentali semplici della corrispondenza X negli spazî S, S' rispettivamente, e propriamente un punto generico A della r situato sulla generatrice a della schiera α avrà per omologa nella X la generatrice $a' \equiv o'^2_3 r'$ della schiera α', omologa della a nella omografia Ω. Ed analogamente per la r'.

Dunque la corrispondenza X presenta $2k$ rette fondamentali semplici in ciascuno dei due spazî. Ogni retta fondamentale semplice $r_i \equiv o^1 o^1_3$ dello spazio S si associa ad una retta fondamentale semplice $r'_i \equiv o'^1 o'^1_3$ dello spazio S' in modo che le superficie fondamentali omologhe delle due rette negli spazî S', S sono rispettivamente le $\varrho'_2 \equiv o' o'_3 r'_i$, $\varrho_2 \equiv o\, o_3 r_i$.

Per ogni altra coppia $\pi_2 \pi'_2$ di superficie omologhe dei fasci Φ, Φ', si ha sempre che la corrispondenza subordinata alla X che intercede fra i punti delle due superficie, non è degenere. In tale corrispondenza alla retta o corrisponde sempre la retta o', ma la proiettività che intercede fra i punti

delle due rette, varia col variare della coppia π_2, π'_2. Perciò le o, o' non sono linee non fondamentali omologhe, ma sono linee fondamentali di 2ª specie fra loro omologhe.

Così nella corrispondenza che si ha fra le π_2, π'_2, alle cubiche basi o_3, o'_3 corrispondono rispettivamente due cubiche v'_3, v_3 le quali variano col variare della coppia $\pi_2 \pi'_2$; e però le o_3, o'_3 sono linee fondamentali di 1ª specie della X negli spazî S, S'.

Nè la corrispondenza X presenta altre linee fondamentali oltre quelle indicate.

Nella corrispondenza subordinata alla X che intercede fra le quadriche omologhe π_2, π'_2 dei fasci Φ, Φ', ad una conica generica c_2 della prima superficie corrisponde una conica c'_2 dell'altra.

Tenendo fisso il piano ψ della c_2 e facendo variare la coppia $\pi_2 \pi'_2$, la c'_2 varia sulla superficie ψ', omologa nella X del piano ψ, descrivendo su di essa un fascio F' proiettivo al fascio F descritto dalla c_2 sul piano ψ.

E come la c_2 in ogni sua posizione si appoggia alla o soltanto nel punto $O \equiv o\psi$, così la c'_2 in ogni sua posizione si appoggia alla o' in un solo punto. Inoltre fissato sulla retta o' un punto generico O', vi sono k coppie di quadriche omologhe $\pi_2 \pi'_2$, sulle quali risultano omologhi i punti O, O', e però esistono sulla ψ' k coniche del fascio F' che passano pel punto O'.

Ne segue che i piani delle coniche c'_2 costituiscono un inviluppo razionale di classe k riferito proiettivamente al fascio di quadriche Φ'. La superficie generata dalle due forme proiettive è la ψ': questa perciò risulta essere una superficie $\psi'_{2k+1} \equiv o'^k o'^k_3 r'_{(i)}$, per $i = 1, 2, \ldots 2k$.

Quel che si è detto per le superficie omologhe dei piani dello spazio S, può ripetersi analogamente per le superficie omologhe dei piani dello spazio S'; e si conclude che *la corrispondenza* X *presenta le rette fondamentali di 2ª specie* o, o' *fra loro omologhe, multiple di ordine* k, sicchè per $k > 1$ non si verifica per la corrispondenza la proprietà enunciata da Cremona.

La superficie σ' dello spazio S' omologa della cubica fondamentale o_3, assieme con una quadrica π'_2 del fascio Φ' forma la superficie completa di ordine $2(2k+1)$ omologa nella X di una quadrica π_2 del fascio Φ.

Perciò la σ' è di ordine $4k$.

Una corda della cubica o'_3, essendo omologa nella X di una corda della cubica o_3, sega la σ' in *due* punti fuori della o'_3: questa perciò è multipla per la σ' di ordine $\frac{4k-2}{2} = 2k-1$.

Così una retta appoggiata alle o', o'_3, essendo omologa nella X di una retta appoggiata alle o, o_3, sega la σ' in *un* punto fuori delle o', o'_3: perciò la o'_3 è multipla per la σ' di ordine $2k$.

Quel che si è detto per la superficie dello spazio S' omologa della o_3, può ripetersi per la superficie dello spazio S omologa della o'_3.

Ne segue che nello spazio S' le linee omologhe delle rette dello spazio S sono curve $c'_{2k+1} \equiv o_3'^{4k} r'^2_{(i)}$; le curve omologhe dei punti della cubica o_3 sono curve $c'_k \equiv o_3'^{2k-1} r'^1_{(i)}$ della superficie σ', e le curve omologhe delle rette dello spazio S appoggiate alla o sono curve $c'_{k+1} \equiv o'^{2k} o'^1 r'^1_{(i)}$.

Ed analogamente per lo spazio S' (¹).

Con ciò la corrispondenza X risulta perfettamente determinata.

Matematica. — *Quelques propriétés des fonctions de Bessel.* Nota II di Joseph Pérès, presentata dal Socio V. Volterra.

4. J'ai montré dans ma Thèse (²) que toute fonction analytique de t est développable en une série procédant suivant les puissances de compositions d'une fonction telle que Ψ. Comme une telle fonction peut toujours se mettre sous la forme

$$a_0 \, J_0(t) + \overset{*}{J}_0 \, \overset{*}{H}(t) \, ,$$

$H(t)$ étant déterminée par une équation de Volterra, il en résulte qu'elle admet un développement convergent

$$a_0 \, J_0(t) + a_1 \, J_1(t) + \cdots + a_n \, J_n(t) + \cdots .$$

J'ai déja énoncé ce résultat et indiqué qu'on peut le rattacher au fait suivant: il existe une fonction

$$k(t, \tau) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{t-\tau}} \, J_1\left(\sqrt{t(t-\tau)}\right) = \sum_1^\infty{}_k \frac{(-1)^k}{2^{2k} \, k!} \, \frac{(t-\tau)^{k-1} \, t^k}{(k-1)!}$$

telle que

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n \, n!} + \int_0^t k(t, \tau) \, \frac{\tau^n}{2^n \, n!} \, d\tau \quad (^3) . \tag{16}$$

(¹) Il tipo più generale di corrispondenza biunivoca spaziale che alle quadriche di un fascio Φ fa corrispondere le quadriche di un fascio Φ' determinando fra due quadriche omologhe una corrispondenza omografica, fu ottenuto da Noether, *Ueber die eindeutige Raumtransformationen*, Math. Annalen, vol. III, § 6, pag. 570.

Il caso in cui la corrispondenza presenta il carattere involutorio, fu ottenuto nella mia Nota: *Su una classe di trasformazioni razionali ed involutorie dello spazio* ..... Giornale di Matematica, vol. XXXI.

Anche per la corrispondenza X_{2k+1} ottenuta in questa Nota, con opportune particolarità nella costruzione indicata, si può fare in modo che essa presenti il carattere involutorio.

(²) Paris 1915. Chap. IV.

(³) Voir deux Notes des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris 1918). La formule (16) est valable en remplaçant $n!$ par $\Gamma(n+1)$ et en prenant, si est nécessaire, la partie finie de l'intégrale, quel que soit n.