ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 6 gennaio 1918.

A. Ròiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *ds^2 einsteiniani in campi newtoniani.* II: *Condizioni di integrabilità e comportamento geometrico spaziale.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

Lo scopo principale delle presenti ricerche, già dichiarato nella Nota I, è l'integrazione delle equazioni della statica einsteiniana negli spazi vuoti (più precisamente, a tensore energetico nullo). A dire il vero, i risultati che ho finora raggiunti non mi consentono di attribuire alla parola integrazione la sua accezione completa di costruzione dell'integrale generale, ma quella più modesta di determinazione di alcune notevoli categorie di soluzioni. Riservandomi di indicare a suo tempo i criteri di semplicità analitica e di interpretazione meccanica, che portano a queste soluzioni, dovrò intrattenermi ancora un po' (e non soltanto in questa seconda Nota) su considerazioni preparatorie.

Qui mi valgo della geometria intrinseca come strumento di calcolo per dedurre ed illustrare le condizioni di integrabilità. Col procedimento adottato, esse si raggruppano tre a tre [cfr. n. 4]. Un gruppo involge soltanto le differenze delle curvature e le anormalità delle congruenze principali, e porta [n. 5] ad una razionale classificazione delle soluzioni *a priori* possibili in due grandi tipi A) e B), dei quali il secondo offre assai più del primo prospettiva di successo a chi si accinga alla integrazione effettiva. Tale secondo tipo presenta a sua volta tre sottocasi [n. 6] con caratteristiche geometriche nettamente distinte.

L'ultimo sottocaso B_3) si integra a vista [n. 7] e costituisce l'equivalente einsteiniano di un campo di forza costante. Lo spazio ambiente rimane rigorosamente euclideo; le linee di forza sono rette parallele, ma la intensità della forza (in senso statico) è costante soltanto in prima approssimazione; riesce invece ancora rigorosamente conforme al caso dei gravi (funzione lineare di una coordinata cartesiana) l'energia posizionale di un punto materiale posto nel campo.

Ho aggiunto [n. 8] un'ovvia riduzione delle equazioni di partenza a quella forma intrinseca sotto cui si sono ricavate le loro condizioni di integrabilità.

1. — Eliminazione delle derivate seconde di V dalle equazioni fondamentali.

Si tratta delle equazioni della statica dei campi vuoti [n. 3 della Nota precedente (¹)]:

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{M} = 0 ,$$

$$\text{(II)} \qquad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} = 0 \qquad (i , k = 1 , 2 , 3),$$

col significato dei simboli ivi richiamato.

Giova anzitutto formare le condizioni di integrabilità delle (II), eliminandone le derivate terze (covarianti) della V a norma delle note identità (²)

$$V_{rpq} - V_{rqp} + \sum_1^3{}_s \, a_{rs,pq} V^{(s)} = 0 \qquad (p , q , r = 1 , 2 , 3).$$

Ove vi si introducano per V_{rpq} , V_{rqp} i valori ricavati dalle (II), e si divida tutto per —V, si ottiene

$$\text{(1)} \qquad \alpha_{rpq} - \alpha_{rqp} + \alpha_{rp} \nu_q - \alpha_{rq} \nu_p - \sum_1^3{}_s \, a_{rs,pq} \nu^{(s)} = 0$$
$$(r , p , q = 1 , 2 , 3),$$

avendo posto

$$\text{(2)} \qquad V = c \, e^{\nu} ,$$

con c costante (di omogeneità) *a priori* arbitraria.

2. — Richiami di geometria intrinseca.

Per lo studio delle (1), giova far largo posto alla metrica dello spazio ambiente, riferendosi ad una terna (pel momento generica) di congruenze ortogonali [1] , [2] , [3] (³). Designeremo al solito con 1 , 2 , 3 le linee, o

(¹) Pp. 307-317 del vol. XXVI di questi Rendiconti (2° semestre 1917).
(²) Ricci et Levi-Civita, *Méthodes* etc., Math. Ann., B. 54, 1900, pag. 143.
(³) Ibidem, Cap. II.

anche le direzioni, corrispondenti; con $\lambda_i^{(r)}$, $\lambda_{i|r}$ $(r = 1, 2, 3)$ i sistemi coordinati contravariante e covariante della congruenza $[i]$. Sussisteranno le relazioni di ortogonalità

$$(3) \qquad \sum_1^3{}_r \lambda_{i|r} \lambda_k^{(r)} = \varepsilon_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

col solito significato delle ε_{ik} (0 per $i \neq k$ e 1 per $i = k$).

La derivata di una qualsiasi funzione v rapporto all'arco l_i della linea i è evidentemente espressa da

$$(4) \qquad \frac{dv}{dl_i} = \sum_1^3{}_r v_r \lambda_i^{(r)},$$

le v_r rappresentando [come già nelle (1)] derivate (ordinarie, o, ciò che fa lo stesso, covarianti) della funzione v.

Gli invarianti differenziali di prim'ordine relativi alla terna sono (tutti e soli) i coefficienti di rotazione di Ricci:

$$(5) \qquad \gamma_{hik} = -\gamma_{ihk} = \sum_1^3{}_{rq} \lambda_{h|rq} \lambda_i^{(r)} \lambda_k^{(q)} \qquad (h, i, k = 1, 2, 3).$$

Tra gli invarianti di secondo ordine meritano speciale attenzione i seguenti:

$$(6) \qquad \gamma_{ij,hk} = \frac{d\gamma_{ijh}}{dl_k} - \frac{d\gamma_{ijk}}{dl_h} + \sum_1^3{}_{h'} \{\gamma_{ijh'}(\gamma_{h'hk} - \gamma_{h'kh}) + \gamma_{h'ik}\gamma_{h'jh} - \gamma_{h'ih}\gamma_{h'jk}\}$$
$$(i, j, h, k = 1, 2, 3),$$

legati ai simboli di Riemann e ai parametri di direzione della terna dalle relazioni

$$(7) \qquad \gamma_{ij,hk} = \sum_1^3{}_{rspq} a_{rs,pq} \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)} \lambda_h^{(p)} \lambda_k^{(q)}.$$

Giova ricordare altresì che, per le varietà ternarie — ed è il caso nostro — le γ con quattro indici si riducono sostanzialmente allo schema

$$(6') \qquad \gamma_{ik} = \gamma_{ki} = \gamma_{i+1\,i+2,\,k+1\,k+2} = -\gamma_{i+2\,i+1,\,k+1\,k+2} = -\gamma_{i+1\,i+2,\,k+2\,k+1}$$
$$(i, k = 1, 2, 3),$$

colla solita convenzione di risguardare equivalenti gli indici che differiscono per multipli di 3.

Le γ_{ik} si comportano rispetto ai simboli α_{ik} di Ricci come le γ a quattro indici rispetto ai simboli di Riemann, avendosi, in luogo delle (7), le formule più semplici

$$(7') \qquad \gamma_{ik} = \sum_1^3{}_{rq} \alpha_{rq} \lambda_i^{(r)} \lambda_k^{(q)},$$

che si possono anche scrivere sotto la forma equivalente

$$(7'') \qquad \alpha_{rp} = \sum_{1}^{3}{}_{h'k'} \gamma_{h'k'} \lambda_{h'|r} \lambda_{k'|p} .$$

Se ne trae, per derivazione covariante,

$$\alpha_{rpq} = \sum_{1}^{3}{}_{h'k'} \left\{ \frac{\partial \gamma_{h'k'}}{\partial x_q} \lambda_{h'|r} \lambda_{k'|p} + \gamma_{h'k'} (\lambda_{h'|rq} \lambda_{k'|p} + \lambda_{h'|r} \lambda_{k'|pq}) \right\} .$$

A queste equazioni covarianti (rispetto ai tre indici p, q, r) se ne possono sostituire altrettante singolarmente invarianti, col criterio abituale di saturare gli indici. Basta moltiplicare per $\lambda_i^{(r)} \lambda_h^{(p)} \lambda_k^{(q)}$ e sommare rispetto ai tre indici p, q, r.

Badando alle (3) e (5), risulta

$$(8) \qquad \sum_{1}^{3}{}_{rpq} \alpha_{rpq} \lambda_i^{(r)} \lambda_h^{(p)} \lambda_k^{(q)} = \frac{d\gamma_{ih}}{dl_k} + \sum_{1}^{3}{}_{j} (\gamma_{jh} \gamma_{jik} + \gamma_{ij} \gamma_{jhk}) .$$

3. — Trasformazione delle condizioni di integrabilità e delle equazioni di Bianchi.

La stessa saturazione degli indici (moltiplicazione per $\lambda_i^{(r)} \lambda_h^{(p)} \lambda_k^{(q)}$ e somma rapporto a p, q, r) può essere applicata alle condizioni di integrabilità (1). Gioverà preventivamente immaginare sostituita nell'ultimo sommatorio, al posto di $\nu^{(s)}$, l'espressione [equivalente in base alle (4)] $\sum_{1}^{3}{}_{j} \frac{d\nu}{dl_j} \lambda_j^{(s)}$. Ove si tenga conto altresì delle (8), (3), (4) e (7), si ricava

$$(9) \qquad \frac{d\gamma_{ih}}{dl_k} - \frac{d\gamma_{ik}}{dl_h} + \sum_{1}^{3}{}_{j} \{ \gamma_{jh} \gamma_{jik} - \gamma_{jk} \gamma_{jih} + \gamma_{ij} (\gamma_{jhk} - \gamma_{jkh}) \}$$
$$+ \gamma_{ih} \frac{d\nu}{dl_k} - \gamma_{ik} \frac{d\nu}{dl_h} - \sum_{1}^{3}{}_{j} \gamma_{ij,hk} \frac{d\nu}{dl_j} = 0 .$$

Nell'ultimo termine compariscono ancora le γ con quattro indici, che si riconducono, quando si voglia, a quelle a due, in base alle (6'). Basta prendere le mosse dall'osservazione che i primi membri delle (9) sono emisimmetrici rispetto ai due indici h e k, cambiando unicamente di segno, quando si scambiano h e k. Si può perciò limitarsi a considerare nelle (9) tre combinazioni semplici dei due indici h e k, per es. le seguenti:

$$\begin{array}{lll} h = i + 1 & , & k = i + 2 ; \\ h = i + 2 & , & k = i \quad ; \\ h = i & , & k = i + 1 . \end{array}$$

Se inoltre, in

$$\sum_{1}^{3}{}_{j} \gamma_{ij,hk} \frac{d\nu}{dl_j} ,$$

si attribuiscono a j i valori $i, i+1, i+2$ (e si tien presente che $\gamma_{ii,hk}=0$) si riscontrano nello sviluppo del sommatorio sole γ a quattro indici dello schema (6'), ossia γ a due indici. Mi dispenso dall'esplicitare questo calcolo in generale, dovendo riprenderlo tra un momento con referenza alla terna principale (anzichè a congruenze ortogonali qualisivogliono).

Completo intanto le formule non specializzate, attribuendo col Ricci [1] forma intrinseca anche alle equazioni segnalate dal Bianchi, cui soddisfanno identicamente le derivate dei simboli di Riemann. Esse possono essere scritte [2]:

$$\sum_{1}^{3}{}_{pq}\, a^{(pq)}\, G_{rpq} - \tfrac{1}{2}\, G_r = 0 \qquad (r=1,2,3),$$

dove

$$G_{rp} = \sum_{1}^{3}{}_{jh}\, a^{(jh)}\, a_{rj,hp}$$

e G è il relativo invariante lineare $\sum_{1}^{3}{}_{rp}\, a^{(rp)}\, G_{rp}$. Per le varietà a tre dimensioni si ha [3]

$$G_{rp} = \alpha_{rp} - \mathfrak{M}\mathfrak{C} a_{rp},$$

quindi

$$G = -2\mathfrak{M}\mathfrak{C},$$

$$G_{rpq} = \alpha_{rpq} - \mathfrak{M}\mathfrak{C}_q\, a_{rp},$$

e le precedenti equazioni possono essere scritte

$$\sum_{1}^{3}{}_{pq}\, a^{(pq)}\, \alpha_{rpq} = 0\,.$$

Saturiamo anche l'indice r, moltiplicando per $\lambda_i^{(r)}$ e sommando rispetto ad r. Tenendo conto delle (8), si ottiene

$$\sum_{1}^{3}{}_{k} \frac{d\gamma_{ik}}{dl_k} + \sum_{1}^{3}{}_{hk} (\gamma_{hk}\,\gamma_{hik} + \gamma_{ih}\,\gamma_{hkk}) = 0\,. \tag{10}$$

4. — Riferimento alla terna principale.

Se le tre congruenze [1], [2], [3] costituiscono la terna principale di curvatura (o una di tali terne nei casi di indeterminazione) [4], si ha

$$\gamma_{ik} = \varepsilon_{ik}\,\omega_i \qquad (i,k=1,2,3), \tag{11}$$

[1] *Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque e in particolare nelle varietà a tre dimensioni*, in questi Rendiconti, vol. XII (1° sem. 1903), pp. 409-420.

[2] Cfr. la Nota *Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein*, ibidem, vol. XXVI (1° sem. 1917), pag. 388.

[3] *Statica einsteiniana*, ibidem, pag. 463.

[4] Ricci et Levi-Civita, loc. cit., pag. 163.

essendo $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ le tre curvature principali, cioè le radici della equazione cubica

$$\|\alpha_{ik} - \omega a_{ik}\| = 0 .$$

La loro somma (curvatura media) è $\mathfrak{M} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a^{(ik)} \alpha_{ik}$. Si può quindi, mettendo in evidenza le ω, assumere la (I)* sotto la forma

$$\text{(I*)} \qquad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0 .$$

Introduciamo nelle (10) i valori (11) delle γ_{ik}, ed esplicitiamo distinguendo i tre casi già indicati al n. precedente. In base alle sole (6'), che in virtù delle (11) divengono

$$\gamma_{h+1\,h+2,\,k+1\,k+2} = \cdots = \varepsilon_{hk}\,\omega_k$$

(e all'annullarsi identico delle γ_{iih}, $\gamma_{ii,hk}$), risulta materialmente:

Per $h = i+1$, $k = i+2$,

$$\text{(12)} \qquad \omega_{i+1}\,\gamma_{i+1\,i\,i+2} - \omega_{i+2}\,\gamma_{i+2\,i\,i+1} + \omega_i(\gamma_{i\,i+1\,i+2} - \gamma_{i\,i+2\,i+1}) = 0 ;$$

per $h = i+2$, $k = i$,

$$\text{(13)} \qquad -\frac{d\omega_i}{dl_{i+2}} + \omega_{i+2}\,\gamma_{i+2\,i\,i} + \omega_i\,\gamma_{i\,i+2\,i} - \frac{dv}{dl_{i+2}}\,\omega_i + \frac{dv}{dl_{i+2}}\,\omega_{i+1} = 0 ;$$

per $h = i$, $k = i+1$,

$$\text{(14)} \qquad \frac{d\omega_i}{dl_{i+1}} - \omega_{i+1}\,\gamma_{i+1\,i\,i} - \omega_i\,\gamma_{i\,i+1\,i} + \frac{dv}{dl_{i+1}}\,\omega_i - \frac{dv}{dl_{i+1}}\,\omega_{i+2} = 0$$
$$(i = 1, 2, 3).$$

Le γ con tre indici distinti, che sole compariscono nelle (12), si possono (attesa la emisimmetria rispetto ai due primi indici) rappresentare con una notazione più comoda, ponendo

$$\text{(15)} \qquad \gamma_i = \gamma_{i+1\,i+2\,i} = -\gamma_{i+2\,i+1\,i} ,$$

Con ciò le (12) divengono

$$-\omega_{i+1}\,\gamma_{i+2} - \omega_{i+2}\,\gamma_{i+1} + \omega_i(\gamma_{i+2} + \gamma_{i+1}) = 0 ,$$

le quali, introducendo le mutue differenze delle curvature principali

$$\text{(16)} \qquad \delta_i = \omega_{i+2} - \omega_{i+1} ,$$

si semplificano ulteriormente in

$$\delta_{i+1}\,\gamma_{i+1} = \delta_{i+2}\,\gamma_{i+2} .$$

Val quanto dire che le (12) si riducono a due sole algebricamente distinte esprimenti che il prodotto

$$\text{(III)} \qquad \delta_i \gamma_i = \varpi \qquad (i = 1, 2, 3)$$

è indipendente dall'indice i.

Se, nelle (13), si cambia i in $i+1$ (il che implica $i+1$ in $i+2$ e $i+2$ in i), e poi, senza toccare l'indice i, si scrive materialmente k al posto di $i+1$ e j al posto di $i+2$, si ottiene (invertendo anche il segno)

$$\text{(IV)} \qquad \frac{d\omega_k}{dl_i} + (\omega_i - \omega_k)\gamma_{kik} + \frac{d\nu}{dl_i}(\omega_k - \omega_j) = 0 .$$

A questo stesso schema si riducono le (14), cambiandovi prima i in $i+2$, e poi scrivendo, senza toccare i, k in luogo di $i+2$ e j in luogo di $i+1$.

In definitiva, *le* (IV) *sostituiscono opportunamente entrambi i gruppi* (13) *e* (14), *coll'intesa che* i, k, j *rappresentano tre indici distinti.*

Accanto alle (III) e (IV) vanno pur prese in considerazione le (10), che esprimono anch'esse condizioni di integrabilità (valide per qualsiasi varietà a tre dimensioni, a differenza delle (III) e (IV) che provengono specificamente dalle equazioni di Einstein). Tali equazioni, riferite anche esse alla terna principale mediante le (11), assumono l'aspetto, già segnalato dal Ricci,

$$\text{(17)} \qquad \frac{d\omega_i}{dl_i} + \sum_{1}^{3}{}_k (\omega_k - \omega_i)\gamma_{kik} = 0 .$$

Sotto questo aspetto si vede subito che si tratta di condizioni già implicitamente contenute nelle (IV), in virtù delle (I*). Infatti immaginiamo, nelle (IV) stesse, di attribuire a k i due valori diversi da i e di sommare. I primi due termini, per essere nulla la somma delle ω, dànno $-\frac{d\omega_i}{dl_i}$; gli ultimi due si elidono; alla somma dei medî si può anche aggiungere l'addendo (nullo) corrispondente al valore i di k. Risulta così

$$-\frac{d\omega_i}{dl_i} + \sum_{1}^{3}{}_k (\omega_i - \omega_k)\gamma_{kik} = 0 ,$$

ossia precisamente la (17).

5. — Discussione delle (III) e conseguente ripartizione degli spazi potenziati vuoti in due tipi A) e B).

A norma delle (III), vi sono due tipi di metriche *a priori* possibili negli spazi vuoti: il tipo A) corrispondente alla restrizione qualitativa $\varpi \neq 0$; e il tipo B) caratterizzato dall'annullarsi di ϖ. Non a caso ho

adoperato la lettera A) per designare il primo tipo, volendo alludere alla necessaria *anormalità* delle congruenze principali. Si ricordi infatti che, data una terna generica, la condizione necessaria e sufficiente perchè la congruenza $[i]$ sia normale (cioè costituita dalle traiettorie ortogonali ad una famiglia di superficie) è espressa dall'annullarsi della *anormalità*

$$\gamma_{i\,i+1\,i+2} - \gamma_{i\,i+2\,i+1}\,.$$

Colla notazione adottata poc'anzi, tale anormalità della $[i]$ vale

$$\gamma_{i+1} + \gamma_{i+2}\,.$$

Ciò posto, qualora fosse $\gamma_{i+1} + \gamma_{i+2} = 0$, essendo ciascuna delle γ diversa da zero in causa di $\varpi \neq 0$, si avrebbe dalle (III)

$$\delta_{i+1} = \frac{\varpi}{\gamma_{i+1}} = -\,\delta_{i+2}$$

e quindi, per le (16),

$$\omega_i - \omega_{i+2} = -\,(\omega_{i+1} - \omega_i)\,,$$

ossia $\delta_i = 0$, il che è inconciliabile con $\varpi \neq 0$.

Dunque, *nel caso* A) *le congruenze principali sono tutte tre necessariamente anormali; inoltre* (dacchè non può neanche annullarsi qualcuna delle δ) *le corrispondenti curvature sono essenzialmente distinte.*

6. — Suddivisione del tipo B).

Per questo secondo tipo si ha

$$\text{(III')} \qquad \delta_i\,\gamma_i = 0 \qquad (i = 1\,,2\,,3)\,,$$

e il modo di annullarsi dei primi membri porge un ulteriore criterio di classificazione. Giova prendere norma dall'ellissoide di curvatura (eventualmente degenere), che ha per assi le ω_i. Si è condotti ai tre sottocasi seguenti:

B_1) (ellissoide a tre assi). Le δ_i sono tutte diverse da zero, e le (III') equivalgono all'annullarsi delle γ_i. Si tratta manifestamente di spazi *normali* (nel senso di Bianchi), risultando normali le tre congruenze principali di curvatura. È perciò giustificato il qualificare B_1) come tipo o sottotipo *normale*.

B_2) (ellissoide rotondo). Una sola delle δ, diciamo δ_3, si annulla, sicchè le (III') esigono

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0\,.$$

La congruenza $[3]$ risulta quindi normale.

Questo sottocaso può dirsi in conformità *seminormale* perchè è normale una almeno delle congruenze principali.

B_3) (sfera). L'ultima eventualità *a priori* possibile si ha supponendo tutte le ω eguali tra loro, e quindi [teorema di Schur, immediatamente desumibile dalle (17)] ad una medesima costante.

7. — Ovvia caratterizzazione geometrica e statica del sottocaso B_3).

In relazione al problema meccanico che è origine e scopo delle presenti ricerche, *il sottocaso* B_3) *può dirsi elementare o galileiano.* Ed ecco perchè. Dovendosi [per la (I) o (I*)] annullare la curvatura media, riconosciamo in primo luogo che il valore comune (e costante) delle tre curvature principali non può essere che zero. Si tratta quindi dell'ordinario spazio euclideo, con che si annullano tutte le α_{ik}. Riferendosi a coordinate cartesiane, le derivazioni covarianti si identificano con derivazioni ordinarie, sicchè le (II) si riducono a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \, \partial x_k} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

Ciò val quanto dire V funzione lineare delle coordinate cartesiane, e quindi riducibile senza pregiudizio della generalità (mediante opportuna orientazione degli assi e scelta dell'origine) alla forma $c + \frac{1}{c} g x_3$ (c velocità della luce in assenza d'egni circostanza perturbatrice, g costante).

L'energia *posizionale* dell'unità di massa posta nel campo è espressa [1] da

$$cV - c^2 = g x_3 ,$$

come nel caso dei gravi, quando x_3 rappresenta la quota. La forza statica del campo è il gradiente di $-\frac{1}{2} V^2$. Essa è quindi costante in direzione, ma non rigorosamente in grandezza; può risguardarsi tale tostochè sia trascurabile $g x_3$ di fronte a c^2.

8. — Forma intrinseca delle (II).

Terminerò questa seconda Nota mettendo sotto forma intrinseca (analoga a quella sotto cui si ricavarono le condizioni di integrabilità) anche le equazioni (II) di Einstein: la (I) ha già questo carattere, come appare materialmente da (I*).

[1] Nota I, nel vol. XXVI di questi Rendiconti (2° semestre 1917), pag. 307.

All'uopo mi riporto alle (4), che, risolute [mercè le (3)] rapporto alle v_r, e riferite alla funzione V anzichè alla v, dànno

$$V_p = \sum_1^3{}_j \frac{dV}{dl_j} \lambda_{j|p} .$$

Introducendo, in luogo di V, la funzione $\frac{dV}{dl_j}$, si ha

$$\frac{\partial}{\partial x_q}\left(\frac{dV}{dl_j}\right) = \sum_1^3{}_h \frac{d}{dl_h}\left(\frac{dV}{dl_j}\right) \lambda_{h|q} ;$$

sicchè, per derivazione covariante della precedente, risulta

$$V_{pq} = \sum_1^3{}_j \frac{\partial}{\partial x_q}\left(\frac{dV}{dl_j}\right) \lambda_{j|p} + \sum_1^3{}_j \frac{dV}{dl_j} \lambda_{j|pq} =$$

$$\sum_1^3{}_{jh} \frac{d}{dl_h}\left(\frac{dV}{dl_j}\right) \lambda_{j|p} \lambda_{h|q} + \sum_1^3{}_j \frac{dV}{dl_j} \lambda_{j|pq} .$$

Saturando i due indici p, q, mediante moltiplicazione per $\lambda_i^{(p)} \lambda_k^{(q)}$ e somma rapporto a p, q, si ottiene, in base alle (3) e (5),

$$\sum_1^3{}_{pq} V_{pq} \lambda_i^{(p)} \lambda_k^{(q)} = \frac{d}{dl_k}\left(\frac{dV}{dl_i}\right) + \sum_1^3{}_j \gamma_{jik} \frac{dV}{dl_j} .$$

A norma di questa formula e della (7'), la stessa saturazione, applicata alle equazioni (II),

$$\alpha_{pq} + \frac{V_{pq}}{V} = 0 ,$$

porta alle equivalenti

$$\text{(II*)} \qquad \gamma_{ik} + \frac{1}{V} \frac{d}{dl_k}\left(\frac{dV}{dl_i}\right) + \sum_1^3{}_j \gamma_{jik} \frac{1}{V} \frac{dV}{dl_j} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3) ,$$

che appunto volevamo fissare, onde averle in pronto all'occasione.