ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Dacchè risulta dimostrato essere la legge di Haüy identica alla legge di Curie, e l'una come l'altra necessarie e sufficienti per costruire e definire la figura normale di un cristallo, facciamo un altro passo innanzi dicendo, che *la legge fondamentale dei cristalli è la legge Haüy-Curie.*

Ogni figura non soddisfacente a questa legge è anormale. Le facce vicinali [1] o la poliedria delle facce [2], ossia le facce a grande sviluppo e a indici complicati, sono escluse dalla legge di Haüy; esse appartengono a figure anormali, e non possono essere giustificate che con un equilibrio instabile durante la cristallizzazione.

Geometria. — *Enti geometrici coordinati a certi covarianti simultanei estensivi.* Nota della dott.ssa ROSARIA GIORDANO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Fra gli enti che, nella interpretazione geometrica dell'annullarsi di certi covarianti simultanei di forme lineari e quadratiche, si presentarono al prof. Del Re, nelle sue lezioni di Analisi estensiva del decorso anno scolastico 1916-17, figurano due interessanti superficie: l'una del 4° ordine, l'altra della 4ª classe rispettivamente [3], risultanti dall'esprimere la condizione perchè simultaneamente si annullino l'invariante bilineare di due rette appartenenti a due congruenze lineari date, e l'invariante di reciprocità rispetto a una quadrica fissa. La forma elegante e sbrigativa con la quale l'analisi estensiva si presta a dare le equazioni delle due superficie, e a studiarne le proprietà principali, mi hanno indotto a trasportare la questione negli spazii ad n dimensioni, e a presentarla, consigliata e aiutata dallo stesso prof. Del Re (al quale rinnovo qui i sentimenti della mia riconoscenza più viva), in una forma nella quale nuovi enti geometrici vengono a fare comparsa, e nuove prove dell'abilità dell'analisi estensiva vengono a essere offerte.

Zeit. f. Krystall. 1902, *35*, pp. 220-241; G. Wulff, *Zur Theorie des Krystallhabitus*, Zeit. f. Krystall., *45*, 433-472; Idem, *Paralleloëder. Structur und richtige Aufstellung der Krystalle*, Zeitschr. f. Krystall., *47*, 607-619.

(1) M. Websky, Zeitschr. Deutsch. geol. Gesell., *677*; P. Gaubert, *Contribution à l'étude des faces cristallines (faces vicinales)*, 1904, XXVII, 6, Bull. d. l. Soc. Miner. de Fr.; Idem, *Sur les anomalies de forme des cristaux*, 1904, XXVII, 238, ibidem; F. Gonnard, *De l'existence de faces vicinales sur l'idocrase d'Ala*, ibidem, 1916, XXXIX, 64-69; C. Viola, op. cit., pag. 407.

(2) A. Scacchi, *Sulla poliedria delle facce nei cristalli*, Nuovo Cimento, 1960, XII.

(3) Nello studio di queste superficie notevole è la presenza di una reciprocità cubica nulla (nella quale sono corrispondenti) caratterizzata dalla proprietà di avere negli assi delle due congruenze lineari e nelle loro trasversali comuni, il sistema base dei sistemi

In uno spazio ad n dimensioni S_n si considerino ordinatamente due spazii S_h, R_k ad $h-1$, $k-1$ dimensioni rispettivamente, e, con essi, due altri spazii analoghi $S_{h'}$, $R_{k'}$ ad $h'-1$, $k'-1$ dimensioni, e siano i primi rappresentati dai prodotti progressivi:

$$(1) \qquad S_h = s_1 s_2 \dots s_h \quad , \quad R_k = r_1 r_2 \dots r_k \qquad (h \leq k \text{ supponiamo})$$

e i secondi dai prodotti analoghi:

$$(1') \qquad S_{h'} = s'_1 s'_2 \dots s'_{h'} \quad , \quad R_{k'} = r'_1 r'_2 \dots r'_{k'} \qquad (h' \leq k' \text{ supponiamo})$$

dove gli s, r sono punti distinti, e così pure gli s', r', e dove $h+k$, $h'+k'$ abbiano valori qualsivoglia in ordine ad $n+1$.

Per uno spazio X_g a $g-1$ dimensioni, rappresentato dal prodotto progressivo:

$$(2) \qquad X_g = x_1 x_2 \dots x_g \qquad (g < n+1)$$

dei punti $x_1, x_2, \dots, x_g$, passeranno due spazii M_τ, $M_{\tau'}$ a $\tau-1$ e $\tau'-1$ dimensioni, dati dai prodotti regressivi:

$$(3) \quad M_\tau = s_1 s_2 \dots s_h X_g \cdot r_1 r_2 \dots r_k X_g = \\ = \Sigma (s_1 s_2 \dots s_h X_g r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_\rho}) r_{j_1} r_{j_2} \dots r_{j_{k-\rho}} X_g$$

$$M_{\tau'} = s'_1 s'_2 \dots s'_{h'} X_g \cdot r'_1 r'_2 \dots r'_{k'} X_g = \\ = \Sigma (s'_1 s'_2 \dots s'_{h'} X_g r'_{i_1} r'_{i_2} \dots r'_{i_{\rho'}}) r'_{j_1} r'_{j_2} \dots r'_{j_{k'-\rho'}} X_g$$

con

$$\tau = h + k + 2g - (n+1) \quad , \quad \tau' = h' + k' + 2g - (n+1)$$

dove $i_1 i_2 \dots i_\rho$, $j_1 j_2 \dots j_{k-\rho}$ sono due permutazioni principali complementari degli indici $1, 2, \dots, k$ di classi ϱ, $k-\varrho$ rispettivamente, ed $i_1 i_2 \dots i_{\rho'}$, $j_1 j_2 \dots j_{k'-\rho'}$ due permutazioni analoghe dei numeri $1, 2, \dots, k'$ di classi ϱ', $k'-\varrho'$, posto che sia:

$$(4) \qquad \varrho = n+1-(h+g) \quad , \quad \varrho' = n+1-(h'+g)$$

ciò che implica necessariamente: $h+g < n+1$, $h'+g < n+1$.

---

lineari tripli dei due spazii, fra i quali intercede, e le cui jacobiane si spezzano nelle quattro quadriche che passano per quegli assi presi tre a tre. In un caso particolare essa diventa quella incontrata per la 1ª volta dal Cremona, quale corrispondenza birazionale reciproca del tipo (cfr. *Opere Matematiche*, vol. II, Mem. 36, pag. 11; e Del Re, *Addizioni alla Nota: Sui sistemi lineari tripli di monoidi d'ordine n* etc., Rend. Acc. Napoli, 1913); ed ha poi pure altri casi particolari, che portano seco particolari notevoli per le superficie.

In allora, assunta, nel modo più generale, una quadrica Q qualsiasi, della quale sia φ *l'omografia indicatrice* [1], secondo l'introduzione fattane dal prof. Del Re, se poniamo, per brevità:

$$(5) \qquad R_{i_{k-\rho}} = r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_{k-\rho}} \quad , \quad R_{j_\rho} = r_{j_1} r_{j_2} \dots r_{j_\rho}$$

$$(5') \qquad R_{i_{k'-\rho'}} = r'_{i_1} r'_{i_2} \dots r'_{i_{k'-\rho'}} \quad , \quad R_{j_{\rho'}} = r'_{j_1} r'_{j_2} \dots r'_{j_{\rho'}}$$

e osserviamo che:

$$\varphi R_{j_{\rho'}} = \varphi r'_{j_1} \varphi r'_{j_2} \dots \varphi r'_{j_{\rho'}} \quad , \quad \varphi X_g = \varphi x_1 \varphi x_2 \dots \varphi x_g$$

avremo l'invariante di reciprocità di M_τ, $M_{\tau'}$ rispetto alla Q nella forma:

$$(6) \qquad \sum_{i_{k-\rho}} (S_h X_g R_{i_{k-\rho}}) R_{j_\rho} X_g \cdot \sum_{i_{k'-\rho'}} (S_{h'} X_g R_{i_{k'-\rho'}}) \mid \varphi R_{i_{\rho'}} \cdot \mid X_g$$

e nella forma equivalente che risulta dal considerare invece del prodotto $M_\tau \mid M_{\tau'} \mid$ il prodotto $M_{\tau'} \mid M_\tau$.

Servendoci della forma precedente, e osservando che $(S_h X_g R_{i_{k-\rho}})$, $(S_{h'} X_g R_{i_{k'-\rho'}})$ sono dei numeri, troviamo che gli spazii X_g soddisfano alla equazione estensiva:

$$(7) \qquad \sum\sum (S_h X_g R_{i_{k-\rho}}) (S_{h'} X_g R_{i_{k'-\rho'}}) R_{i_\rho} X_g \cdot \mid \varphi (R_{i_{\rho'}} X_g) = 0$$

[1] Per ogni quadrica Q generale o degenerata, esiste in una maniera *unica e ben determinata* un'omografia estensiva generale o degenerata, *simmetrica* (coincidente, cioè, con la propria coniugata) che seguita dall'operazione di *prendere il supplemento di Grassmann*, fornisce il sistema polare, generale o degenerato, rispetto alla quadrica: una tale omografia il prof. Del Re chiama *indicatrice della quadrica* che, a sua volta, chiama *indicatrice dell'omografia estensiva* (e che risponde ad un ente diverso dalle quadriche indicatrici in uso negli spazii a tre dimensioni, per omografie vettoriali), poichè l'una e l'altra s'individuano a vicenda. Se

$$\begin{aligned} \xi' &= (t_1 \mid \xi) s_1 + (t_2 \mid \xi) s_2 + \dots + (t_\mu \mid \xi) s_\mu \\ &= (s_1 \mid \xi) t_1 + (s_2 \mid \xi) t_2 + \dots + (s_\mu \mid \xi) t_\mu \end{aligned}$$

è (cfr. Del Re, *Sopra certe formule fondamentali per la rappresentazione di omografie tra forme estensive*, n. 5. Rend. Acc. Napoli, 1915) un'omografia estensiva simmetrica, sarà:

$$\mid \xi' = (t_1 \mid \xi) \mid s_1 + (t_2 \mid \xi) \mid s_2 + \dots + (t_\mu \mid \xi) s_\mu$$

ovvero

$$\mid \xi' = (s_1 \mid \xi) \mid t_1 + (s_2 \mid \xi) \mid t_2 + \dots + (s_\mu \mid \xi) \mid t_\mu .$$

la rappresentazione della polarità corrispondente alla quadrica indicatrice; mentre ne sarà

$$(t_1 \mid \xi)(s_1 \mid \xi) + (t_2 \mid \xi)(s_2 \mid \xi) + \dots + (t_\mu \mid \xi)(s_\mu \mid \xi) = 0$$

l'equazione in termini delle coordinate del punto $\xi = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_{n+1} e_{n+1}$, essendo $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ i vertici di una piramide unitaria auto-normale di elementi di riferimento.

che si scinde in $\binom{n+1}{\varrho-\varrho'}$ ovvero $\binom{n+1}{\varrho'-\varrho}$ equazioni scalari, secondochè sia:

$$(8) \qquad \varrho + g + (n+1) - (\varrho' + g) \lesseqgtr n+1 \quad \text{cioè} \quad \varrho - \varrho' \lesseqgtr 0 .$$

Se poi è $\varrho = \varrho'$, la (7) è un'equazione scalare.

Ogni termine della (7) contiene al quarto grado il prodotto estensivo X_g, per cui, nel linguaggio dell'analisi ordinaria, al 4° grado, figurano in (7) le coordinate dello spazio a $g-1$ dimensioni corrispondente. Ne segue che il luogo di questi spazii allorchè l'invariante simultaneo (6) si annulla per gli spazii M_τ, $M_{\tau'}$ è l'intersezione di $\binom{n+1}{\varrho-\varrho'}$ ovvero $\binom{n+1}{\varrho'-\varrho}$ spazii biquadratici, ovvero è uno stesso di quegli spazii se $\varrho = \varrho'$. Nel caso della superficie del 4° ordine di cui sopra, che si forma proprio per $\varrho = \varrho'$, è interessante dedurre la forma esplicita della equazione di essa, direttamente dalla (7). Bisognerà supporre $h = k = h' = k' = 2$, $g = 1$, $n = 3$, e che sia φ la identità, con che si arriva appunto all'equazione:

$$(9) \qquad (s_1 r_1 r_2 x)(s'_1 r'_1 r'_2 x) \begin{vmatrix} (s_2 | s'_2) & (s_2 | x) \\ (x | s'_2) & (x | x) \end{vmatrix} - (s_2 r_1 r_2 x)(s'_1 r'_1 r'_2 x) \begin{vmatrix} (s_1 | s'_2) & (s_1 | x) \\ (x | s'_2) & (x | x) \end{vmatrix} +$$
$$- (s_1 r_1 r_2 x)(s'_1 r'_1 r'_2 x) \begin{vmatrix} (s_2 | s'_1) & (s_2 | x) \\ (x | s'_1) & (x | x) \end{vmatrix} + (s_2 r_1 r_2 x)(s'_2 r'_1 r'_2 x) \begin{vmatrix} (s_1 | s'_1) & (s_1 | x) \\ (x | s'_1) & (x | x) \end{vmatrix} = 0$$

nella forma stessa ottenuta dal prof. Del Re.

Per dare un altro esempio di applicazione della (7), supponiamo di avere $h = h' = 1$, $k = k' = 2$, $g = 2$, $n = 3$; e che, come nell'esempio precedente, sia φ la identità. Dalla (7) si avrà:

$$(s_1 r_1 r_2 X_2)\, s_1 X_2 \,|\, (s'_1 r'_1 r'_2 X_2)\, s'_1 X_2 = 0 ;$$

ovvero:

$$(s_1 r_1 r_2 X_2)(s'_1 r'_1 r'_2 X_2)\, s_1 X_2 \,|\, s'_1 X_2 = 0$$

Se teniamo arbitrarî i punti r_1, r_2, r'_1, r'_2 in questa espressione, rimangono arbitrarî i fattori $(s_1 r_1 r_2 X_2)$, $(s'_1 r'_1 r'_2 X_2)$ e l'equazione precedente si riduce effettivamente (scrivendo ora s, s' in luogo di s_1, s'_1) alla seguente:

$$(10) \qquad (s | X_2) \cdot (s' | X_2) = 0$$

che rappresenta un complesso di 2° grado luogo delle rette da ciascuna delle quali i punti fissi s, s' restano proiettati mediante coppie di piani ortogonali in una metrica nella quale l'assoluto sia la quadrica dei supplementi. Esso viene ad essere, in sostanza, il complesso correlativo di quello studiato dall'Hirst nell'articolo: *On the complexes generated by two correlative planes* (cfr. Collectanea Mathematica in Memoriam Dominici Chelini, pag. 51), e gode in conseguenza di tutte le proprietà dualistiche di

quelle possedute da questo. Interessante è la forma dell'equazione in analisi ordinaria di un tal complesso, e che si deduce ovviamente dalla (10).

Suppongasi, infatti, che (essendo $e_1, \ldots, e_n$ i vertici della pir. un. ortogonale di rifer.) sia:

$$t = t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + t_4 e_4 \quad , \quad (t = s, s', x_1, x_2);$$

si avrà da una parte:

$$X_2 = \sum (x_{1i} x_{2k} - x_{1k} x_{2i}) e_i e_k = \sum p_{ik} e_i e_k \quad \text{per} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

avendo posto, come d'uso,

$$p_{ik} = x_{1i} x_{2k} - x_{1k} x_{2i}$$

e da un'altra:

$$\begin{aligned} t X_2 = {} & (t_1 p_{23} + t_2 p_{31} + t_3 p_{12}) e_1 e_2 e_3 + (t_1 p_{24} - t_2 p_{14} + t_4 p_{12}) e_1 e_2 e_4 \\ & + (- t_1 p_{34} + t_3 p_{14} + t_4 p_{31}) e_3 e_1 e_4 + (t_2 p_{34} - t_3 p_{24} + t_4 p_{23}) e_2 e_3 e_4 \\ & \text{per} \quad t = s, s'; \end{aligned}$$

sicchè sarà:

$$\begin{aligned} (s_1 X_2 \mid s_1' X_2) = {} & (s_1 p_{23} + s_2 p_{31} + s_3 p_{12}) (s_1' p_{23} + s_2' p_{31} + s_3' p_{12}) \\ & + (s_1 p_{24} - s_2 p_{14} + s_4 p_{12}) (s_1' p_{24} - s_2' p_{14} + s_4' p_{12}) \\ & + (- s_1 p_{34} + s_3 p_{14} + s_4 p_{31}) (- s_1' p_{34} + s_3' p_{14} + s_4' p_{31}) \\ & + (s_2 p_{34} - s_3 p_{24} + s_4 p_{23}) (s_2' p_{34} - s_3' p_{24} + s_4' p_{23}) = 0 \end{aligned}$$

l'equazione in discorso.

Matematica. — *Les équations différentielles linéaires d'ordre infini et l'équation de Fredholm.* Nota di Trajan Lalesco, presentata dal Socio V. Volterra.

Dans un travail antérieur, nous avons montré que, dans des cas très généraux, la résolution d'une équation intégrale du type de Volterra est équivalente à un problème de Cauchy, relatif à une équation différentielle linéaire d'ordre infini et nous en avons tiré la conclusion que l'introduction dans l'Analyse de ce nouvel instrument analytique établit une liaison de continuité entre les équations différentielles d'ordre fini et les équations aux dérivées partielles. D'où sa grande portée dans cette dernière théorie ainsi que l'étendue variée de ses applications.

Il est intéressant de développer sur l'équation de Fredholm des considérations analogues. On peut y parvenir, à l'aide d'une suite remarquable de noyaux qui s'introduisent naturellement dans les problèmes bilocaux de la théorie des équations différentielles linéaires d'ordre fini.