ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

quelle possedute da questo. Interessante è la forma dell'equazione in analisi ordinaria di un tal complesso, e che si deduce ovviamente dalla (10).

Suppongasi, infatti, che (essendo $e_1, \dots, e_n$ i vertici della pir. un. ortogonale di rifer.) sia:

$$t = t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + t_4 e_4 \quad , \quad (t = s, s', x_1, x_2);$$

si avrà da una parte:

$$X_2 = \sum (x_{1i} x_{2k} - x_{1k} x_{2i}) e_i e_k = \sum p_{ik} e_i e_k \quad \text{per} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

avendo posto, come d'uso,

$$p_{ik} = x_{1i} x_{2k} - x_{1k} x_{2i}$$

e da un'altra:

$$\begin{aligned} tX_2 = {} & (t_1 p_{23} + t_2 p_{31} + t_3 p_{12}) e_1 e_2 e_3 + (t_1 p_{24} - t_2 p_{14} + t_4 p_{12}) e_1 e_2 e_4 \\ & + (-t_1 p_{34} + t_3 p_{14} + t_4 p_{31}) e_3 e_1 e_4 + (t_2 p_{34} - t_3 p_{24} + t_4 p_{23}) e_2 e_3 e_4 \end{aligned}$$

$$\text{per} \quad t = s, s';$$

sicchè sarà:

$$\begin{aligned} (s_1 X_2 \mid s'_1 X_2) = {} & (\ s_1 p_{23} + s_2 p_{31} + s_3 p_{12}) (\ s'_1 p_{23} + s'_2 p_{31} + s'_3 p_{12}) \\ & + (\ s_1 p_{24} - s_2 p_{14} + s_4 p_{12}) (\ s'_1 p_{24} - s'_2 p_{14} + s'_4 p_{12}) \\ & + (-s_1 p_{34} + s_3 p_{14} + s_4 p_{31}) (-s'_1 p_{34} + s'_3 p_{14} + s'_4 p_{31}) \\ & + (\ s_2 p_{34} - s_3 p_{24} + s_4 p_{23}) (\ s'_2 p_{34} - s'_3 p_{24} + s'_4 p_{23}) = 0 \end{aligned}$$

l'equazione in discorso.

Matematica. — *Les équations différentielles linéaires d'ordre infini et l'équation de Fredholm.* Nota di TRAJAN LALESCO, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Dans un travail antérieur, nous avons montré que, dans des cas très généraux, la résolution d'une équation intégrale du type de Volterra est équivalente à un problème de Cauchy, relatif à une équation différentielle linéaire d'ordre infini et nous en avons tiré la conclusion que l'introduction dans l'Analyse de ce nouvel instrument analytique établit une liaison de continuité entre les équations différentielles d'ordre fini et les équations aux dérivées partielles. D'où sa grande portée dans cette dernière théorie ainsi que l'étendue variée de ses applications.

Il est intéressant de développer sur l'équation de Fredholm des considérations analogues. On peut y parvenir, à l'aide d'une suite remarquable de noyaux qui s'introduisent naturellement dans les problèmes bilocaux de la théorie des équations différentielles linéaires d'ordre fini.

Prenons un intervalle ab $(a < b)$ et definissons à l'intérieur de cet intervalle, la fonction $G_1(x, y)$ égale à $\frac{1}{2}$ si $x > y$ et à $-\frac{1}{2}$ si $x < y$: pour $x = y$, posons $G_1(x, x) = 0$.

Considérons l'ensemble des noyaux itérés de $G_1(x, y)$, définis par la relation de récurrence

$$G_p(x, y) = \int_a^b G_1(x, s)\, G_{p-1}(s, y)\, ds\,.$$

Ces noyaux jouissent de propriétés générales intéressantes [1] et permettent de faire une étude systématique des problèmes bilocaux dans la théorie des équations différentielles linéaires.

Soit l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)\, y = f(x)$$

et proposons-nous, pour prendre un problème bilocal simple, de déterminer l'intégrale de (1) qui prend, ainsi que ses $n-1$ premières dérivées successives, des valeurs égales et de signe contraire, aux points *0* et *1*.

En prenant cemme fonction inconnue auxiliaire

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \varphi(x)$$

l'équation intégrale du problème s'obtient immédiatement sous la forme:

$$\varphi(x) + \int_0^1 [a_1(x)\, G_1(x, s) + a_2(x)\, G_2(x, s) + \\ + \cdots + a_n(x)\, G_n(x, s)]\, \varphi(s)\, ds = f(x)\,.$$

C'est une équation de Fredholm, mise sous une forme analogue à celle que l'on rencontre lorsqu'on traite le problème de Cauchy à l'aide de l'équation de Volterra.

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient sans peine l'extension que nous avons en vue.

Si les coefficients $a_n(x)$ restent bornés et $< M$, il est facile de voir en effet, que l'expression

$$a_1(x)\, G_1(x, y) + \cdots + a_n(x)\, G_n(x, y) + \cdots$$

représente une série régulièrement convergente dans l' intervalle ab, car on a, dans cet intervalle:

$$|G_n(x, y)| \leq \frac{1}{2^n}\,.$$

[1] T. Lalesco, *Sur l'application des équations intégrales aux équations différentielles linéaires* (Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences de Paris 6 Mai 1918).

La résolution du problème bilocal considéré, pour une équation différentielle linéaire d'ordre infini, revient donc a la résolution d'une équation de Fredholm, dont le noyau présente, si les coefficients $a_n(x)$ sont bornés et quelconques, un large caractére de généralité.

Tous les autres problèmes bilocaux de la théorie des équations différentielles linéaires, d'ordre fini ou infini, se réduisent à des équations de Fredholm analogues. Le noyau a la forme générale suivante:

$$a_1(x)\,[G_1(x\,,y)+g_0(y)]+\cdots+a_n(x)\,[G_n(x\,,y)+g_n(y)]+\cdots$$

où $g_n(y)$ désigne un polynome en y de degré inférieur à n.

Matematica. — *Sopra una classe di nuclei semi-definiti positivi*. Nota di ERNESTO LAURA, presentata dal Socio TULLIO LEVI-CIVITA.

1. Indichiamo con $\Delta_{(n)}$ l'operatore di Laplace a n variabili:

$$\Delta_{(n)}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

e con $u(r)$ l'integrale dell'equazione:

$$\Delta_{(n)}u+u=0 \tag{1}$$

funzione della sola distanza $r=\sqrt{(x_1-x_1')^2+\cdots+(x_n-x_n')^2}$ e regolare per $r=0$.

Lo scopo di questa Nota è di dimostrare che l'espressione:

$$\int_S\int_S u(r)\,\mu(\mathrm{P})\,\mu(\mathrm{P}')\,d\mathrm{S}_\mathrm{P}\,d\mathrm{S}_\mathrm{P}\,,$$

dove $r=|\mathrm{P}\mathrm{P}'|$, μ è una funzione reale, continua dei punti del campo S tutto situato al finito, il quale è una porzione di S_n o di F_{n-1}, ..., o di F_0, *è riducibile ad una somma di quadrati ed è quindi* ≥ 0 *qualunque sia la funzione* μ.

2. Notiamo perciò che, se con $J_n(r)$ indico la funzione di Bessel di ordine n e di 1ª specie, l'integrale $u(r)$ vale:

$$\frac{1}{r^{\frac{n-2}{2}}}\,J_{\frac{n-2}{2}}(r)\,.$$

E poichè:

$$J_{\frac{n-2}{2}}(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{r^{\frac{n-2}{2}}}{2^{\frac{n-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\int_0^\pi\cos(r\cos\varphi)\,\mathrm{sen}^{n-2}\varphi\,d\varphi$$