ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

La résolution du problème bilocal considéré, pour une équation différentielle linéaire d'ordre infini, revient donc a la résolution d'une équation de Fredholm, dont le noyau présente, si les coefficients $a_n(x)$ sont bornés et quelconques, un large caractére de généralité.

Tous les autres problèmes bilocaux de la théorie des équations différentielles linéaires, d'ordre fini ou infini, se réduisent à des équations de Fredholm analogues. Le noyau a la forme générale suivante:

$$a_1(x)\left[G_1(x,y)+g_0(y)\right]+\cdots+a_n(x)\left[G_n(x,y)+g_n(y)\right]+\cdots$$

où $g_n(y)$ désigne un polynome en y de degré inférieur à n.

Matematica. — *Sopra una classe di nuclei semi-definiti positivi.* Nota di ERNESTO LAURA, presentata dal Socio TULLIO LEVI-CIVITA.

1. Indichiamo con $\Delta_{(n)}$ l'operatore di Laplace a n variabili:

$$\Delta_{(n)}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

e con $u(r)$ l'integrale dell'equazione:

$$\Delta_{(n)}u+u=0 \tag{1}$$

funzione della sola distanza $r=\sqrt{(x_1-x_1')^2+\cdots+(x_n-x_n')^2}$ e regolare per $r=0$.

Lo scopo di questa Nota è di dimostrare che l'espressione:

$$\int_S\int_S u(r)\,\mu(P)\,\mu(P')\,dS_P\,dS_{P'}\,,$$

dove $r=|PP'|$, μ è una funzione reale, continua dei punti del campo S tutto situato al finito, il quale è una porzione di S_n o di $F_{n-1},\ldots,$ o di F_0, *è riducibile ad una somma di quadrati ed è quindi* ≥ 0 *qualunque sia la funzione* μ.

2. Notiamo perciò che, se con $J_n(r)$ indico la funzione di Bessel di ordine n e di 1ª specie, l'integrale $u(r)$ vale:

$$\frac{1}{r^{\frac{n-2}{2}}}\,J_{\frac{n-2}{2}}(r)\,.$$

E poichè:

$$J_{\frac{n-2}{2}}(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{r^{\frac{n-2}{2}}}{2^{\frac{n-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\int_0^\pi \cos(r\cos\varphi)\,\mathrm{sen}^{n-2}\varphi\,d\varphi$$

potremo porre la $u(r)$, sopprimendo una costante moltiplicativa, sotto la forma:

$$u(r) = \int_0^\pi \cos(r \cos \varphi) \operatorname{sen}^{n-2}\varphi \, d\varphi . \tag{2}$$

Questa formola si può anzi verificare facilmente, osservando che:

$$\Delta_{(n)} u(r) = u'' + \frac{n-1}{r} u' .$$

dove gli accenti indicano derivazioni rispetto a r.

Avremo dunque:

$$\Delta_{(n)} u(r) = \int_0^\pi \Big[- \cos(r \cos \varphi) \cos^2\varphi \operatorname{sen}^{n-2}\varphi -$$

$$- \frac{n-1}{r} \operatorname{sen}(r \cos \varphi) \cos \varphi \operatorname{sen}^{n-2} \varphi \Big] d\varphi .$$

E poichè, con una integrazione per parti, si ha:

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}(r \cos \varphi) \cos \varphi \operatorname{sen}^{n-2}\varphi \, d\varphi = \frac{r}{n-1} \int_0^\pi \cos(r \cos \varphi) \operatorname{sen}^n \varphi \, d\varphi$$

avremo pure:

$$\Delta_{(n)} u(r) = \int_0^\pi - \cos(r \cos \varphi) [\cos^2\varphi \operatorname{sen}^{n-2}\varphi + \operatorname{sen}^n \varphi] \, d\varphi = - u(r)$$

c. d. d.

3. Il risultato contenuto nella (2) si può interpretare nel seguente modo. Sia $d\omega$ l'elemento superficiale della ipersfera unitaria:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$$

e consideriamo l'integrale $(n-1)^{plo}$:

$$\int_\omega \cos[x_1 - x_1') \alpha_1 + \cdots + (x_n - x_n') \alpha_n] \, d\omega ,$$

dove le $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ indicano le coordinate omogenee di $d\omega$. Introduciamo come coordinate di un punto sopra ω, un sistema di coordinate geografiche, l'asse polare delle quali sia parallelo alla retta congiungente i punti $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ $(x_1' x_2' \ldots x_n')$. Se α è la colatitudine e $u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}$ le variabili rimanenti, si ha:

$$d\omega = \operatorname{sen} u_2 \operatorname{sen}^2 u_3 \ldots \operatorname{sen}^{n-3} u_{n-2} \operatorname{sen}^{n-2} \alpha \, du_1 \, du_2 \ldots du_{n-2} \, d\alpha$$

$$(x_1 - x_1') \alpha_1 + \cdots + (x_n - x_n') \alpha_n = r \cos \alpha$$

dove ho posto, come precedentemente, $r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \cdots + (x_n - x'_n)^2}$. Avremo perciò:

$$\int_\omega \cos[(x_1 - x'_1)\,\alpha_1 + \cdots + (x_n - x'_n)\,\alpha_n]\,d\omega =$$
$$= C \int_0^\pi \cos(r\cos\alpha)\,\text{sen}^{n-2}\alpha\,d\alpha\,,$$

e C è una costante che si calcola facilmente. Si conclude dunque: *l'integrale della* (1) *funzione della sola r e regolare per $r = 0$ si può porre sotto la forma*:

$$u(r) = \int_\omega \cos[(x_1 - x'_1)\,\alpha_1 + \cdots + (x_n + x'_n)\,\alpha_n]\,d\omega\,,$$

dove ω è una ipersfera unitaria e $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ sono le coordinate omogenee di $d\omega$.

3. Poniamo:

$$V = \int_S \int_S \cos[(x_1 - x'_1)\,\alpha_1 + \cdots + (x_n - x'_n)\,\alpha_n]\,\mu(P)\,\mu(P')\,dS_P\,dS_{P'}$$

la S e la μ avendo il significato del n. 1. Facendo la posizione:

$$\lambda_P = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$$
$$\lambda_{P'} = x'_1\alpha_1 + \cdots + x'_n\alpha_n$$

si ricava subito:

$$\text{(3)}\qquad V = \int_S \int_S \cos(\lambda_P - \lambda_{P'})\,\mu(P)\,\mu(P')\,dS_P\,dS_{P'} =$$
$$= \left[\int_S \cos\lambda_P\,\mu(P)\,dS_P\right]^2 + \left[\int_S \text{sen}\,\lambda_P\,\mu(P)\,dS_P\right]^2.$$

Integriamo la V rispetto alle $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ed estendiamo l'integrazione ad una sfera unitaria ω. Avremo:

$$\int_\omega V d\omega = \int_S \int_S \mu(P)\,\mu(P')\,dS_P\,dS_{P'} \times$$
$$\times \int_\omega \cos[(x_1 - x'_1)\,\alpha_1 + \cdots + (x_n - x'_n)\,\alpha_n]\,d\omega\,.$$

L'integrale superficiale, per quanto precede, vale $u(r)$. Dalla (3) consegue dunque:

$$\text{(4)}\qquad \int_S \int_S u(r)\,\mu(P)\,\mu(P')\,dS_P\,dS_{P'} =$$
$$= \int_\omega d\omega \left[\int_S \cos\lambda_P\,\mu(P)\,dS_P\right]^2 + \int_\omega d\omega \left[\int_S \text{sen}\,\lambda_P\,\mu(P)\,dS_P\right]^2$$

formola che dà la richiesta riduzione a forma canonica. Dalla (4) discende poi:

$$\int_S \int_S u(r)\, \mu(P)\, \mu(P')\, dS_P\, dS_{P'} \geqq 0 . \tag{5}$$

4. Se nella formola (5) si pone $n=2$ e $n=3$ si ha:

$$\int_S \int_S Y_0(r)\, \mu(P)\, \mu(P')\, dS_P\, dS_{P'} \geqq 0$$

$$\int_S \int_S \frac{\operatorname{sen} r}{r}\, \mu(P)\, \mu(P')\, dS_P\, dS_{P'} \geqq 0 .$$

Questa ultima formula fu da me già usata in una ricerca [1] di Fisica matematica.

La dimostrazione qui data evita il passaggio al limite ivi usato.

5. Nella formula (5) si ha l'eguaglianza solo se $V=0$; cioè se:

$$\int_S \cos \lambda_P\, \mu(P)\, dS_P = \int_S \operatorname{sen} \lambda_P\, \mu(P)\, dS_P = 0 . \tag{6}$$

Se ora la 1ª di queste uguaglianze viene integrata, l'integrazione essendo estesa alla sfera unitaria ω, si ottiene, procedendo come prima:

$$\int_S u(r)\, \mu(P)\, dS_P = 0 , \tag{7}$$

dove r indica ora la distanza del punto P dal centro di ω. E poichè [2]

[1] *Sopra le vibrazioni armoniche smorzate di un corpo elastico immerso in un fluido.* Rendiconti R. Acc. Lincei, vol. XXI, serie 5ª, pag. 756 e pag. 811.

[2] Invero se si pone: $x_i = \xi_i + h_i$ e quindi:

$$\lambda_P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i \quad ,$$

le (6) divengono (poichè le h_i non dipendono dalle ξ_i):

$$\cos\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i\right) \int_S \cos\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i\right) \mu(P)\, dS_P - \operatorname{sen}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i\right) \int_S \operatorname{sen}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i\right) \mu(P)\, dS_P = 0$$

$$\operatorname{sen}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i\right) \int_S \cos\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i\right) \mu(P)\, dS_P + \cos\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i\right) \int_S \operatorname{sen}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i\right) \mu(P)\, dS_P = 0$$

dalle quali consegue:

$$\int_S \cos\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i\right) \mu(P)\, dS_P = \int_S \operatorname{sen}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i\right) \mu(P)\, dS_P = 0 .$$

questo centro è qualunque, si deduce che la (7) è valida per ogni punto dello spazio.

Si conclude: nella (5) la uguaglianza è verificata solamente per funzioni $\mu(P)$ soddisfacenti la (7) (1).

Matematica. — *Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio.* Nota II di D. Montesano, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

1. Nello spazio S data una cubica gobba o_3 e fissate una retta o, corda della cubica, e $2k$ rette r che si appoggino alle linee o_3, o, a ciascuna in un punto, senza presentare ulteriori particolarità, resta determinato un sistema omaloidico di superficie

$$\pi_{2k+1} \equiv o_3^k\, o^k\, r_{(1)} \dots r_{(2k)}\,.$$

Stabilita una omografia fra questo sistema e quello dei piani dello spazio S′, nella corrispondenza birazionale X_{2k+1} che ne risulta fra i punti degli spazi S, S′, le superficie del secondo spazio, omologhe dei piani del primo, sono superficie

$$\chi'_{2k+1} \equiv o_3'^k\, o'^k\, r'_{(1)} \dots r'_{(2k)}$$

formanti un sistema affatto analogo al precedente.

Nella corrispondenza X_{2k+1} *sono linee fondamentali di 2ª specie omologhe le rette* o, o'.

Tutto ciò risulta dalla Nota I.

Per $k = 1$, si ottiene una corrispondenza birazionale $X_3 \equiv \begin{matrix} o_3\,, o\,, 2r \\ o_3'\,, o'\,, 2r' \end{matrix}$ assai semplice (2).

Questa corrispondenza X_3 può essese assunta come *corrispondenza fondamentale generatrice di ogni altra corrispondenza* X_{2k+1} *del tipo in esame*, in base al seguente teorema:

(1) Non mi è riuscito di dimostrare che le $\mu(P)$ soddisfacenti a questa equazione sono identicamente nulle.

(2) Un caso particolare della corrispondenza X_3 è quello nel quale i due sistemi omaloidici collegati alla corrispondenza sono costituiti ciascuno da superficie di 3° ordine aventi in comune quattro rette in posizione generica (linee fondamentali di 1ª specie) e le due rette (linee fondamentali di 2ª specie) appoggiate alle precedenti.

Cayley con procedimento analitico giunge al risultato che la Jacobiana di un siffatto sistema sia costituita dagli 8 piani che le rette fondamentali di 1ª specie determinano con quelle di 2ª specie (*On the rational transformation between two spaces.* Proc. of the London Math. Soc., vol. III, n. 102, pag. 175).

Invece è noto che la Jacobiana è costituita dalle 4 quadriche che le rette fondamentali di 1ª specie determinano a tre a tre.