ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

questo centro è qualunque, si deduce che la (7) è valida per ogni punto dello spazio.

Si conclude: nella (5) la uguaglianza è verificata solamente per funzioni $\mu(\mathrm{P})$ soddisfacenti la (7) ([1]).

Matematica. — *Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio.* Nota II di D. Montesano, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

1. Nello spazio S data una cubica gobba o_3 e fissate una retta o, corda della cubica, e $2k$ rette r che si appoggino alle linee o_3, o, a ciascuna in un punto, senza presentare ulteriori particolarità, resta determinato un sistema omaloidico di superficie

$$\pi_{2k+1} \equiv o_3^k\, o^k\, r_{(1)} \ldots r_{(2k)}\,.$$

Stabilita una omografia fra questo sistema e quello dei piani dello spazio S', nella corrispondenza birazionale X_{2k+1} che ne risulta fra i punti degli spazi S, S', le superficie del secondo spazio, omologhe dei piani del primo, sono superficie

$$\chi'_{2k+1} \equiv o_3'^k\, o'^k\, r'_{(1)} \ldots r'_{(2k)}$$

formanti un sistema affatto analogo al precedente.

Nella corrispondenza X_{2k+1} *sono linee fondamentali di 2ª specie omologhe le rette* o, o'.

Tutto ciò risulta dalla Nota I.

Per $k = 1$, si ottiene una corrispondenza birazionale $X_3 \equiv \begin{matrix} o_3, o, 2r \\ o_3', o', 2r' \end{matrix}$ assai semplice ([2]).

Questa corrispondenza X_3 può essese assunta come *corrispondenza fondamentale generatrice di ogni altra corrispondenza* X_{2k+1} *del tipo in esame*, in base al seguente teorema:

([1]) Non mi è riuscito di dimostrare che le $\mu(\mathrm{P})$ soddisfacenti a questa equazione sono identicamente nulle.

([2]) Un caso particolare della corrispondenza X_3 è quello nel quale i due sistemi omaloidici collegati alla corrispondenza sono costituiti ciascuno da superficie di 3° ordine aventi in comune quattro rette in posizione generica (linee fondamentali di 1ª specie) e le due rette (linee fondamentali di 2ª specie) appoggiate alle precedenti.

Cayley con procedimento analitico giunge al risultato che la Jacobiana di un siffatto sistema sia costituita dagli 8 piani che le rette fondamentali di 1ª specie determinano con quelle di 2ª specie (*On the rational transformation between two spaces.* Proc. of the London Math. Soc., vol. III, n. 102, pag. 175).

Invece è noto che la Jacobiana è costituita dalle 4 quadriche che le rette fondamentali di 1ª specie determinano a tre a tre.

Date k successive corrispondenze $X_3^{(1)}, \ldots X_3^{(k)}$ delti po indicato che intercedano rispettivamente fra gli spazî $S, S_1 ; S_1, S_2 ; \ldots S_{k-1}, S'$, per $k > 1$, se sempre due corrispondenze successive $X_3^{(i)}, X_3^{(i+1)}$, per $i = 1, \ldots k-1$, hanno in comune nello spazio $S^{(i)}$ la cubica gobba fondamentale e la retta fondamentale di 2ª specie, senza presentare ulteriori particolarità, la corrispondenza prodotto

$$X_3^{(1)} \times X_3^{(2)} \ldots \times X_3^{(k)}$$

è una corrispondenza X_{2k+1} del tipo in esame.

Per dimostrare il teorema basta effettuare il prodotto indicato.

Se la prima e l'ultima corrispondenza data hanno rispettivamente negli spazî S, S' le cubiche fondamentali o_3, o'_3 e le rette fondamentali di 2ª specie o, o', nella corrispondenza prodotto alla congruenza lineare di rette Q che ha per direttrici le o, o_3, corrisponde la congruenza lineare di rette Q' che ha per direttrici le o', o'_3, e sempre due punteggiate che abbiano per sostegni due raggi omologhi r, r' delle due congruenze, si corrispondono con proiettività non degenere, nella quale al punto $O \equiv ro$ corrisponde il punto $O' = r'o'$.

In generale se in due spazî S, S' sono date due congruenze lineari di curve Q, Q' riferite fra di loro con corrispondenza biunivoca, e se sempre per ogni coppia di linee omologhe r, r' delle due congruenze resta determinata una corrispondenza biunivoca $H_{rr'}$ fra i punti delle due linee, il sistema di tutte queste corrispondenze $H_{rr'}$ costituisce una corrispondenza birazionale X fra i punti degli spazî S, S'.

Ora affinchè una linea direttrice o della Q ed una linea direttrice o' della Q' risultino linee fondamentali di 2ª specie omologhe nella corrispondenza X, è necessario e sufficiente che si verifichino le seguenti condizioni:

1° in ogni corrispondenza $H_{rr'}$ il punto o i punti variabili di appoggio della linea r alla o debbono avere per omologhi il punto o i punti variabili di appoggio della linea r' alla o';

2° un punto generico O della o ed un punto generico O' della o' debbono appartenere a k coppie di linee omologhe della congruenza, per $k > 0$;

3° se esistono coppie di linee omologhe rr' delle due congruenze, per le quali le corrispondenze $H_{rr'}$ presentino punti singolari, nessuno di questi punti o soltanto un numero finito deve cadere sulle o, o' rispettivamente.

In tali condizioni può dirsi che ad ogni punto generico della linea o dello spazio S (o della linea o' dello spazio S') corrisponde nell'altro spazio la o' (o la o) contata k volte e che perciò se le o, o' sono rispettivamente degli ordini ν, ν', esse risultano multiple rispettivamente di ordine $k\nu', k\nu$

per le superficie dello spazio S, o dello spazio S', omologhe dei piani dell'altro spazio.

Ma a giustificare rigorosamente quest'asserzione occorre il ragionamento che segue:

Un piano generico ψ dello spazio S è segato in μ punti P da una curva generica r della congruenza Q, se μ è l'ordine delle curve della congruenza. Corrispondentemente nello spazio S' la superficie ψ' omologa del piano ψ è segata da una curva generica della congruenza Q', fuori delle linee direttrici e dei punti base della congruenza, in μ punti P'.

Ora si fissi uno qualunque dei ν punti di sezione della linea o col piano ψ — e sia il punto O — e per un punto generico O' della linea o' si considerino le k curve r' della congruenza Q' che escono dal punto O' e sono omologhe di curve r della congruenza Q che passano pel punto O.

Su ciascuna delle k linee r' ora indicate uno dei μ punti P' del caso generale coincide col punto O', e però la superficie ψ' risulta tangente nel punto O' ai k piani che la tangente nel punto O' alla linea o' determina rispettivamente con le tangenti nello stesso punto alle k linee r' ora indicate.

Ripetendo per tutti i ν punti O, sezioni del piano ψ con la o, ciò che si è detto per uno di essi, si deduce che la superficie ψ' ha una linea multipla di ordine $k\nu$ nella o'.

Inoltre dal ragionamento fatto segue che ai piani ψ dello spazio S che hanno in comune un punto O della curva o, corrispondono superficie ψ' dello spazio S' che in ogni punto O' della o' hanno in comune k piani tangenti, sicchè nella sezione di due siffatte superficie la linea o' conta per una linea semplice di ordine $\nu'.(k\nu)^2 + k\nu'$, mentre in generale nella sezione di due superficie ψ', omologhe di due piani generici dello spazio S, la linea o' conta per una linea semplice di ordine $\nu'.(k\nu)^2$.

Ciò prova che nella corrispondenza X se ad una retta generica dello spazio S corrisponde nello spazio S' una curva di ordine n, ad una retta dello spazio S appoggiata alla o nel punto O, corrisponde una curva di ordine $n - k\nu'$.

Questo fatto può esprimersi dicendo che al punto O corrisponde nello spazio S' una linea di ordine $k\nu'$ infinitamente prossima alla linea o' su tutte le superficie ψ' omologhe dei piani della stella (O), sicchè ad una retta di tale stella corrisponde, oltre all'anzidetta linea, un'ulteriore curva di ordine $n - k\nu'$.

Ed analogamente per lo spazio S.

Ciò posto, avendo già dimostrata l'esistenza di una corrispondenza birazionale X dotata di due rette fondamentali di 2ª specie omologhe multiple di ordine k per la corrispondenza, essendo k un numero intero arbitrario, è agevole dedurre ulteriormente l'esistenza di corrispondenze biunivoche spaziali dotate di due linee fondamentali di ordine ν, ν', multiple rispettivamente per la corrispondenza secondo i numeri $k\nu'$, $k\nu$, essendo ν, ν' due numeri interi arbitrarî.

Infatti dopo aver riferito gli spazî S, S' con la corrispondenza X, si riferisca lo spazio S_0 allo spazio S con una corrispondenza birazionale $H_{\mu,\nu}$ e lo spazio S' allo spazio S'_0 con una corrispondenza birazionale $H'_{\nu',\mu'}$, essendo le H, H' due corrispondenze arbitrarie che non presentino alcuna particolarità rispetto alla X (¹).

Con ciò resterà determinata una corrispondenza birazionale

$$Y = H \times X \times H'$$

fra gli spazî S_0, S'_0, nella quale risulteranno omologhe la congruenza lineare Q_ν dello spazio S_0, omologa nella H della congruenza lineare di rette $Q \equiv |o, o_3|$ dello spazio S, e la congruenza lineare $Q_{\nu'}$ dello spazio S'_0, omologa nella H' della congruenza lineare di rette $Q' \equiv |o', o'_3|$ dello spazio S'.

E dalle particolarità che si verificano nella X per le varie coppie di rette omologhe delle Q, Q', si deducono le particolarità che si verificano nella Y per le varie coppie di curve omologhe delle Q_ν, $Q'_{\nu'}$, e si riconosce che si verificano tutte le condizioni che occorrono per potere concludere che la direttrice o_ν della congruenza Q_ν, omologa nella H della retta o, e la direttrice $o'_{\nu'}$ della $Q'_{\nu'}$, omologa nella H' della retta o', sono linee fondamentali di 2ª specie omologhe nella Y, multiple rispettivamente degli ordini $k\nu'$, $k\nu$.

Dunque *esistono sempre trasformazioni birazionali dello spazio, nelle quali si presentano linee fondamentali di 2ª specie omologhe, degli ordini* ν, ν', *multiple rispettivamente per la trasformazione secondo i numeri* $k\nu'$, $k\nu$, *essendo* ν, ν', k *tre numeri interi arbitrari.*

(¹) Volendo fare uso di corrispondenze di tipo noto si potranno assumere due *corrispondenze bimonoidiche* $H_{\nu,\nu}$, $H'_{\nu',\nu'}$ (De Paolis, *Sopra un sistema omaloidico formato da superficie di ordine n con un punto n — 1 — plo*. Giornale di Matematiche, vol. 13).