ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Matematica. — *Proprietà del prodotto graduale.* Nota della prof. VIRGINIA VESIN, presentata dal Corrispondente G. PEANO.

Per moltiplicare due numeri con infinite cifre decimali, è necessario operare su numeri approssimati. Il metodo più semplice è quello del prodotto graduale, noto già ai tempi di Keplero, e che chiamasi anche prodotto ordinato, simmetrico, abbreviato. Preferisco il primo nome, perchè si parla del grado, e non dell'ordine di un polinomio; la moltiplicazione simmetrica si riferisce al procedimento, qui sotto indicato dalla proposizione 7, mentre il procedimento indicato al n. 6, non è simmetrico; il risultato, o prodotto, è lo stesso. Colla frase « moltiplicazione abbreviata » si può intendere più cose differenti; ed effettivamente s'intendono operazioni quasi identiche, ma non del tutto, a quella che qui esamino.

In questa Nota, premessa la definizione di prodotto graduale, ed alcune proprietà, che occorrono nel seguito, enuncio una regola per limitare la differenza fra prodotto ordinario e prodotto graduale; questa regola non la incontrai in alcuno dei numerosi libri relativi a questo soggetto, e non si trova nelle Note del prof. Peano, *Approssimazioni numeriche* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1917], che pure sono un'ampia raccolta di proposizioni e citazioni storiche relative a questo soggetto.

Qui adotto le notazioni di queste Note.

In quanto segue, ognuna delle lettere a, b indica una quantità numerica, o numero reale positivo, lo 0 incluso.

Ognuna delle lettere n, p, q indica un numero intero (positivo, o nullo, o negativo).

$\mathrm{V}a$ indica il valore intero di a.

$\mathrm{X} =$ dieci, è la base della numerazione.

1. $$\mathrm{V}_n a = \mathrm{X}^{-n}\,\mathrm{V}(\mathrm{X}^n a). \quad \text{Definizione.}$$

Questo $\mathrm{V}_n a$ si può leggere « il valore con n decimali di a ». Così: $\mathrm{V}_2\pi = 3{\cdot}14$, $\mathrm{V}_0\pi = 3$, $\mathrm{V}_{-1}\pi = 0$. Nel caso di n negativo, la corrispondenza fra il simbolo V_n e la sua lettura, è solo all'incirca. Ogni simbolo ha il valore dato dalla definizione, e non quello del linguaggio ordinario.

2. $$\mathrm{T}_n a = \mathrm{V}_n a - \mathrm{V}_{n-1} a. \quad \text{Def.}$$

$T_n a$ si può leggere « il termine di grado n di a ». Così: $T_2\pi = 0{\cdot}04$, $T_0\pi = 3$, $T_{-1}\pi = 0$. Si ha:

3. $a = \Sigma T_r a$, ove r assume i valori interi.

Esprime lo sviluppo di una quantità in frazione decimale.

4. $M_n a = a - V_n a$ Def.

$M_n a$ si può leggere « mantissa d'ordine n di a », ed è la quantità che bisogna aggiungere a $V_n a$ per avere a.

5. $a \times_n b = \Sigma T_r a \times T_s b$, ove r, s assumono i valori interi, tali che $r + s \leq n$. Def.

$a \times_n b$ si legge « il prodotto di grado n, di a per b »; ed è la somma dei prodotti dei termini di a per i termini di b, limitatamente ai prodotti il cui grado non supera n.

6. $a \times_n b = \Sigma T_r a \times V_{n-r} b$, ove r assume i valori interi.

Si ottiene dalla precedente facendo la somma rispetto ad s. Essa indica un modo di calcolare il prodotto graduale mediante prodotti parziali.

7. $a \times_n b = a \times_{n-1} b + \Sigma T_r a \times T_{n-r} b$, ove r assume i valori interi.

Questa permette di calcolare il prodotto, operando simmetricamente rispetto ai due fattori.

8. $a \times_n b = b \times_n a$.

Esprime la proprietà commutativa del prodotto graduale.

9. $a \times_n b = V_p a \times_n b + M_p a \times_n b$.

Esprime la proprietà distributiva del prodotto graduale rispetto alla somma, in un caso particolare. Non sussiste questa proprietà in generale.

10. $V_p a \times_{p+q} V_q b = V_p a \times V_q b$.

Il prodotto di grado $p + q$, di due quantità aventi rispettivamente solo p e q cifre decimali, come $V_p a$ e $V_q b$, vale il loro prodotto ordinario.

11. $M_p a \times_{p+q} M_q b = 0$.

Il prodotto di grado $p + q$ di due quantità, l'una minore di X^{-p}, e l'altra minore di X^{-q}, vale 0.

Le precedenti proposizioni da 6 ad 11 sono qui ricordate perchè servono per il teorema che segue.

12. Σ cifre $a = \Sigma X^r T_r a$, ove r assume i valori interi. Def.

Il nuovo simbolo Σ cifre a si può leggere « la somma delle cifre di a », e si esprime coi simboli precedenti, come è scritto. Quando a ha un numero finito di cifre non nulle, questa somma è finita; quando ne ha infinite, la somma è infinita; quando $a = 0$, la somma $= 0$.

13. $$a \times b - a \times_n b < (\Sigma \text{ cifre } a)\, X^{-n}.$$

Questa **regola** si applica se a ha un numero finito di cifre; si trova in Vieille (2ª ed. 1854), ed in altri autori. Una dimostrazione elementare si trova nel mio articolo: *Prodotti approssimati* (Periodico di Matematica, fascicolo V, 1917).

14. $$a \times b - a \times_{p+q} b < (\Sigma \text{ cifre } V_p a + \Sigma \text{ cifre } V_q b + 1)\, X^{-p-q}.$$

Questa è la proposizione che volevo stabilire. La sua dimostrazione consta dei passi seguenti:

(1) $$\begin{aligned} a \times b &= (V_p a + M_p a) \times b = V_p a \times b + M_p a \times b \\ &= V_p a \times b + M_p a \times (V_q b + M_q b) \\ &= V_p a \times b + M_p a \times V_q b + M_p a \times M_q b \end{aligned}$$

e ciò in virtù della prop. 4.

(2) $$a \times_{p+q} b = V_p a \times_{p+q} b + M_p a \times_{p+q} V_q b$$

in virtù delle proposizioni 8, 9, 11.

(3) $$V_p a \times b - V_p a \times_{p+q} b < (\Sigma \text{ cifre } V_p a)\, X^{-p-q}$$

(4) $$M_p a \times V_q b - M_p a \times_{p+q} V_q b < (\Sigma \text{ cifre } V_q b)\, X^{-p-q}.$$

Le (3) e (4) derivano dalla prop. 13.

(5) $$M_p a \times M_q b < X^{-p-q}$$

perchè $M_p a < X^{-p}$, e $M_q b < X^{-q}$. Dalle (1), (2), (3), (4), (5) segue il teorema.

Per illustrare la regola precedente mediante un esempio con poche cifre, prendo il classico problema del calcolo di $\pi \times \sqrt{2}$.

Si ha $\pi = 3{\cdot}1415\ldots$, $\sqrt{2} = 1{\cdot}4142\ldots$ Calcolo:

Prodotto di grado 0	$= T_0\pi \times T_0\sqrt{2}$	$= 3$
Somma dei prodotti di grado 1	$= T_0\pi \times T_1\sqrt{2} + T_1\pi \times T_0\sqrt{2}$	$= 1{\cdot}3$
" " " " 2	$= T_0\pi \times T_2\sqrt{2} + T_1\pi \times T_1\sqrt{2} + T_2\pi \times T_0\sqrt{2}$	$= {\cdot}11$
" " " " 3		$= 30$
	$\pi \times_3 \sqrt{2}$	$= 4{\cdot}440$

onde $\pi \times \sqrt{2} > 4{\cdot}440$, e $<$ dello stesso numero aumentato di:

$$\Sigma \text{ cifre } V_4\ \pi + \Sigma \text{ cifre } V_{-1} \sqrt{2} + 1 = 15\,,$$

$$\text{o} \quad \Sigma \text{ cifre } V_3\ \pi + \Sigma \text{ cifre } V_0 \sqrt{2} + 1 = 11\,,$$

$$\text{o} \quad \Sigma \text{ cifre } V_2\ \pi + \Sigma \text{ cifre } V_1 \sqrt{2} + 1 = 14\,,$$

$$\text{o} \quad \Sigma \text{ cifre } V_1\ \pi + \Sigma \text{ cifre } V_2 \sqrt{2} + 1 = 11\,,$$

$$\text{o} \quad \Sigma \text{ cifre } V_0\ \pi + \Sigma \text{ cifre } V_3 \sqrt{2} + 1 = 14\,,$$

$$\text{o} \quad \Sigma \text{ cifre } V_{-1} \pi + \Sigma \text{ cifre } V_4 \sqrt{2} + 1 = 13 \quad \text{unità dell'ordine decimale 3.}$$

Segue: $\pi \times \sqrt{2} < 4{\cdot}451$.

La prima e la seconda espressione del resto nel prodotto graduale sono note; ed è appunto, cercando di concordare le due espressioni che ho trovato la legge generale.

Il prodotto graduale serve pure a calcolare per approssimazione il prodotto di due numeri con un numero finito di cifre decimali. Si ha in questo caso una regola simile alla 14.

15. Se u, v sono interi positivi, lo zero compreso, e se a e b sono quantità numeriche con un numero finito $p + r$ e $q + s$ di cifre decimali, cioè se a è della forma (intero $\times X^{-p-r}$) e b è della forma (intero $\times X^{-q-s}$), allora:

$$a \times b - a \times_{p+q} b < (\Sigma \text{ cifre } M_p a + \Sigma \text{ cifre } M_q b)\, X^{-p-q}\,.$$

Infatti:

$$(1) \qquad \begin{aligned} a \times b &= a \times (V_q b + M_q b) = a \times V_q b + a \times M_q b \\ &= (V_p a + M_p a) \times V_q b + a \times M_q b \\ &= V_p a \times V_q b + M_p a \times V_q b + a \times M_q b \end{aligned}$$

ed

$$(2) \qquad a \times_{p+q} b = V_p a \times_{p+q} V_q b + M_p a \times_{p+q} V_q b + a \times_{p+q} M_q b\,.$$

Ma

$$(3) \qquad V_p a \times V_q b = V_p a \times_{p+q} V_q b$$

per la prop. 10; e dalla 13, si ha:

$$(4) \qquad M_p a \times V_q b < M_p a \times_{p+q} V_q b + (\Sigma \text{ cifre } M_p a)\, X^{-p-q}$$

$$(5) \qquad a \times M_q b < a \times_{p+q} M_q b + (\Sigma \text{ cifre } M_q b)\, X^{-p-q}\,.$$

Dalle (1) . . . (5) il teorema.

E s e m p i o. — Vuolsi calcolare per approssimazione il prodotto dei numeri finiti: $x = 3{\cdot}1415$; $y = 1{\cdot}4142$.

Si è visto che:

$$
\begin{array}{lr}
x \times_3 y & = 4{\cdot}440 \\
\text{Somma dei prodotti di grado } 4 & 23 \\
\quad " \quad " \quad " \quad\quad " \; 5 & 39 \\
\hline
x \times_5 y & = 4{\cdot}44269
\end{array}
$$

Il prodotto esatto ha otto cifre decimali; $x \times_5 y$ ne ha cinque. Perciò sarà $x \times y > 4{\cdot}44269$, e minore di questa quantità aumentata:

somma delle 3 ultime cifre di x, $= 10$

o " " 2 ultime cifre di x, e l'ultima di $y = 8$,

o " " ultima di x e le 2 ultime di y $= 11$,

o " " 3 ultime di y $= 7$ unità

dell'ultimo ordine decimale.

Segue: $x \times y < 4{\cdot}44276$.

Aeronautica. — *Sulla misura barometrica delle altezze a scopo aeronautico.* Nota II di MARIO TENANI, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

L'applicazione della formula altimetrica al calcolo delle altezze, ove, come è necessario per ridurre l'errore inferiore a 1 m. su 100, si voglia tener conto della temperatura attuale, richiede mezzi speciali che ora descriveremo: accenneremo pertanto alla speciale disposizione da darsi al termometro a bordo e a una nuova forma di altimetro che permette l'immediata applicazione della formula altimetrica senza calcoli o tabelle di incomodo uso.

Misura della temperatura. — Come abbiamo veduto, per una misura dell'altezza con l'approssimazione di circa l'uno per 100, occorre e basta conoscere la media delle temperature osservate al suolo e all'altezza che si vuol determinare.

Mentre la temperatura al suolo è nota con sufficiente attendibilità, perchè misurata all'ombra e in località generalmente adatta e con ventilazione, la misura della temperatura in alto richiede speciale attenzione. A bordo il termometro oltre ad essere posto in località ventilata dovrebbe anche essere protetto di giorno dalla forte influenza della radiazione. Negli aeromobili la ventilazione è sempre sufficiente, data la velocità propria sempre notevole di tali apparecchi; ma la difesa dalla radiazione solare è difficile, a meno che non si ricorra a dispositivi speciali. Uno potrebbe essere il