ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Evansi; Nattan e Larrier per l'*Evansi*, *Brucey*, *congolense*, *soudanense* e *gambiense*.

Il solo esempio di passaggio dalla madre al feto, riportato da Sivori e Leclerc, in una cavia, nata da madre infetta di *caderas*, che mostrò, fin dalla nascita, dei tripanosomi nel sangue, ha un valore molto relativo, poichè con ragione, fa osservare il Mesnil, come l'utero della madre contenesse un feto morto.

Meccanica. — *Sopra il movimento di rotazione diurna della Terra.* Nota II di A. Antoniazzi, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Equazioni del movimento e loro integrazione.

Il sistema di coordinate, rispetto al quale abbiamo determinato il momento delle forze, ha l'asse z in coincidenza con l'asse di figura della Terra e il piano zy passante per il punto S', perciò l'orientamento di questo piano è dato dalla ascensione retta α dell'astro, contata a partire da un punto fisso dell'equatore, e il detto piano ruota intorno all'asse z con velocità data da $\frac{d\alpha}{dt}$. Se dunque si indicano con $p\,q\,n$ le velocità di rotazione della Terra intorno agli assi, saranno $p\,q\,\frac{d\alpha}{dt}$ le velocità di rotazione del sistema di assi. Pertanto le equazioni (3) divengono

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &A\frac{dp}{dt}+\left(Cn-A\frac{d\alpha}{dt}\right)q=P\\ &A\frac{dq}{dt}-\left(Cn-A\frac{d\alpha}{dt}\right)p=0\\ &C\frac{dn}{dt}=0. \end{aligned}\right.$$

La terza dà

$$n = \text{costante}.$$

Per integrare le due prime equazioni si ponga da prima $P=0$ e si sostituiscano in luogo degli assi $x\,y$ gli altri due assi $x_1 y_1$ fissi nel piano dell'equatore, dirigendo l'asse x_1 al punto di origine delle ascensioni rette. Se si indicano con $p_1 q_1$ le velocità di rotazione intorno agli assi $x_1 y_1$, dalle (4) si deducono le equazioni

$$\frac{dp_1}{dt}+\frac{C}{A}nq_1=0 \qquad \frac{dq_1}{dt}-\frac{C}{A}np_1=0$$

dalle quali

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{C^2}{A^2} n^2 q_1 = 0$$

che si integra in maniera nota e dà

$$q_1 = n_1 \operatorname{sen} \frac{C}{A} n t + n_2 \cos \frac{C}{A} n t$$

essendo n_1 ed n_2 due costanti d' integrazione. Risulta poi

$$p_1 = n_1 \cos \frac{C}{A} n t - n_2 \operatorname{sen} \frac{C}{A} n t .$$

Per passare da questi valori ai valori cercati $p\,q$ basta notare che gli assi $x\,y$ sono ruotati rispetto ad $x_1 y_1$, nel verso positivo, dell'angolo α, perciò sarà

$$p = p_1 \cos \alpha + q_1 \operatorname{sen} \alpha$$
$$q = q_1 \cos \alpha - p_1 \operatorname{sen} \alpha .$$

Per conseguenza, posto

(5) $$\frac{C}{A} n t - \alpha = \tau$$

risulta

(6) $$\begin{cases} p = n_1 \cos \tau - n_2 \operatorname{sen} \tau \\ q = n_1 \operatorname{sen} \tau + n_2 \cos \tau \end{cases}$$

e si verifica che queste due espressioni costituiscono un integrale completo delle due prime equazioni differenziali (4) nelle quali sia supposto $P = 0$. Il metodo della variazione delle costanti arbitrarie ci darà l' integrale nella ipotesi che P sia funzione di t non sempre nulla. Se nelle due prime equazioni (4) si sostituiscono i valori di p e q dati dalle (6), nelle quali si ritengano $n_1 n_2$ funzioni del tempo, risulta

$$\frac{dn_1}{dt} \cos \tau - \frac{dn_2}{dt} \operatorname{sen} \tau = \frac{P}{A}$$

$$\frac{dn_1}{dt} \operatorname{sen} \tau + \frac{dn_2}{dt} \cos \tau = 0$$

da cui

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{P}{A} \cos \tau \qquad \frac{dn_2}{dt} = - \frac{P}{A} \operatorname{sen} \tau .$$

Rimesso in luogo di τ il suo valore (5), se si sviluppano seno e coseno e si integra per parti considerando $\frac{P}{A} \cos \alpha$ e rispettivamente $\frac{P}{A} \operatorname{sen} \alpha$

come fattore finito, si trova

$$n_1 = \frac{P}{Cn}\,\text{sen}\,\tau - \frac{1}{Cn}\int \text{sen}\,\frac{C}{A}\,n\,t\,\frac{d(P\cos\alpha)}{dt}\,dt +$$
$$+ \frac{1}{Cn}\int \cos\frac{C}{A}\,n\,t\,\frac{d(P\,\text{sen}\,\alpha)}{dt}\,dt + h_1$$
$$n_2 = \frac{P}{Cn}\cos\tau - \frac{1}{Cn}\int \cos\frac{C}{A}\,n\,t\,\frac{d(P\cos\alpha)}{dt}\,dt -$$
$$- \frac{1}{Cn}\int \text{sen}\,\frac{C}{A}\,n\,t\,\frac{d(P\,\text{sen}\,\alpha)}{dt}\,dt + h_2$$

essendo $h_1\,h_2$ due costanti d'integrazione.

È facile convincersi fin d'ora che i quattro integrali dei secondi membri portano soltanto piccoli termini di correzione. Si noti anzitutto che tenuto conto della espressione trovata per P (Nota I) può porsi

$$\frac{P}{Cn} = \varkappa\,\frac{a^3}{r^3}\,\text{sen}\,2\delta\,, \tag{7}$$

essendo $\varkappa$ una costante, a il semigrand'asse dell'orbita, r la distanza geocentrica e δ la declinazione dell'astro. Pertanto, le due quantità $P\cos\alpha$, $P\,\text{sen}\,\alpha$ dipendono soltanto dalla posizione del punto S e possono esprimersi in funzione degli elementi dell'orbita di quel punto e del tempo, perciò le derivate di quelle due quantità sono somme di termini, ciascuno dei quali contiene un fattore, che sarà o il moto del corpo nella sua orbita o la variazione di un elemento dell'orbita. Nella successiva integrazione comparirà invece un divisore dell'ordine di grandezza di n cioè della velocità della rotazione diurna della Terra, e quindi assai più grande del corrispondente moltiplicatore. Per questo motivo è lecito semplificare il calcolo dei quattro integrali supponendo (soltanto per il detto calcolo) che il punto S si muova intorno alla Terra su un'orbita circolare per cui rimangono costanti il moto geocentrico μ sull'orbita e la distanza geocentrica $r = a$, nel quale caso il secondo membro della (7) si riduce al prodotto $\varkappa\,\text{sen}\,2\delta$.

Introducendo quest'ultima espressione nei quattro integrali, compariranno insieme la declinazione vera attuale δ dell'astro [1] e la differenza α di ascensione retta contata a partire da un punto fisso dell'equatore. Se, per uniformità, anche per α si vuol porre la vera ascensione retta attuale dell'astro, si dovrà allora al $\frac{d\alpha}{dt}$ togliere la variazione dipendente dalla pre-

[1] La deviazione dell'asse istantaneo di rotazione dall'asse d'inerzia è affatto trascurabile per quanto riguarda la misura di δ.

cessione p_α in ascensione retta, per cui, ad esempio, in luogo del primo integrale si avrebbe

$$\int \operatorname{sen} \frac{C}{A} n t \frac{d(P\cos\alpha)}{dt} dt + \int \operatorname{sen} \frac{C}{A} n t \,.\, P \operatorname{sen} \alpha \frac{dp_\alpha}{dt} \,.$$

Ma è da notare che la precessione in ascensione retta è di 46″, il moto corrispondente diviso (in seguito all'integrazione) per una quantità dell'ordine di grandezza di n porta un fattore così piccolo da rendere assolutamente trascurabile l'ultimo integrale, per cui nelle espressioni di n_1 e di n_2 possiamo ritenere che α e δ rappresentino l'ascensione retta e la declinazione attuali dell'astro.

Possiamo dunque assumere come elementi di riferimento l'eclittica e l'equinozio attuali e allora, essendo ε l'obliquità dell'eclittica, $\lambda\beta$ la longitudine e la latitudine dell'astro, avremo

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen}\delta &= \operatorname{sen}\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen}\lambda \\ \cos\delta\cos\alpha &= \cos\beta\cos\lambda \\ \cos\delta\operatorname{sen}\alpha &= -\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\varepsilon + \cos\beta\cos\varepsilon\operatorname{sen}\lambda \,. \end{aligned} \right.$$

Indichiamo ancora con l la longitudine dell'astro nella sua orbita, con Ω la longitudine del nodo, con i la inclinazione dell'orbita sulla eclittica e allora, considerando il triangolo formato dai circoli massimi dell'eclittica e dell'orbita e dal circolo di latitudine dell'astro si ha

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos(l-\Omega) &= \cos\beta\cos(\lambda-\Omega) \\ \operatorname{sen}(l-\Omega)\cos i &= \cos\beta\operatorname{sen}(\lambda-\Omega) \\ \operatorname{sen}(l-\Omega)\operatorname{sen} i &= \operatorname{sen}\beta \end{aligned} \right.$$

dalle quali si ricava (sommando le due prime moltiplicate rispettivamente per $\cos\Omega$ e per $-\operatorname{sen}\Omega$, ecc.)

$$\begin{aligned} \cos\beta\cos\lambda &= \cos(l-\Omega)\cos\Omega - \operatorname{sen}(l-\Omega)\operatorname{sen}\Omega\cos i \\ \cos\beta\operatorname{sen}\lambda &= \cos(l-\Omega)\operatorname{sen}\Omega + \operatorname{sen}(l-\Omega)\cos\Omega\cos i \\ \operatorname{sen}\beta &= \operatorname{sen}(l-\Omega)\operatorname{sen} i \,. \end{aligned}$$

Combinando queste espressioni con le (8) potremo osservare che, avendo trascurata l'eccentricità dell'orbita (nel caso della Luna questa è circa 0,05), è ragionevole trascurare anche i prodotti $\operatorname{sen} i \operatorname{sen}\varepsilon$, $\operatorname{sen} i\cos\varepsilon$ (per la Luna $\operatorname{sen} i = 0{,}08$ circa) e allora (posto $\cos i = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} i$) risulta

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\delta &= \operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen} l + \cdots \\ \cos\delta\cos\alpha &= \cos l + \cdots \\ \cos\delta\operatorname{sen}\alpha &= \cos\varepsilon\operatorname{sen} l + \cdots \end{aligned}$$

e per conseguenza

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\delta\cos\alpha &= \operatorname{sen}\varepsilon\operatorname{sen} 2l + \cdots \\ \operatorname{sen} 2\delta\operatorname{sen}\alpha &= \operatorname{sen}\varepsilon\cos\varepsilon(1-\cos 2l) + \cdots \end{aligned}$$

I secondi membri di queste equazioni vanno sostituiti nei quattro integrali che entrano a comporre le espressioni di n_1 ed n_2, mentre per i primi termini di quelle espressioni si dovrà tener conto della (7). A integrazioni eseguite risulta

$$n_1 = \varkappa \frac{a^3}{r^3} \operatorname{sen} 2\delta \operatorname{sen} \tau + \frac{2\varkappa\mu \operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{C}{A}n - 2\mu} \cos^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos\left(\frac{C}{A}nt - 2l\right) + $$

$$+ \frac{2\varkappa\mu \operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{C}{A}n + 2\mu} \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos\left(\frac{C}{A}nt + 2l\right) + \cdots + h_1$$

$$n_2 = \varkappa \frac{a^3}{r^3} \operatorname{sen} 2\delta \cos \tau - \frac{2\varkappa\mu \operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{C}{A}n - 2\mu} \cos^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}\left(\frac{C}{A}nt - 2l\right) - $$

$$- \frac{2\varkappa\mu \operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{C}{A}n + 2\mu} \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}\left(\frac{C}{A}nt + 2l\right) + \cdots + h_2,$$

e quindi dalle (6)

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} q &= \varkappa \frac{a^3}{r^3} \operatorname{sen} 2\delta + \frac{2\varkappa\mu \operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{C}{A}n - 2\mu} \cos^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}(2l - \alpha) \\ &\quad - \frac{2\varkappa\mu \operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{C}{A}n + 2\mu} \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \operatorname{sen}(2l + \alpha) + \cdots + h \operatorname{sen}(H + \tau) \\ p &= \frac{2\varkappa\mu \operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{C}{A}n - 2\mu} \cos^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos(2l - \alpha) \\ &\quad + \frac{2\varkappa\mu \operatorname{sen}\varepsilon}{\frac{C}{A}n + 2\mu} \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\varepsilon \cos(2l + \alpha) + \cdots + h \cos(H + \tau) \end{aligned} \right.$$

essendo h, H due nuove costanti che sostituiscono le precedenti $h_1 h_2$.

Il primo termine della espressione di q dà origine alle formule di Precessione e Nutazione generalmente adottate; tutti gli altri termini sono così piccoli da non alterare sensibilmente le dette formule. Ma dalle espressioni complete di p e q risultano definiti i piccolissimi movimenti periodici dell'asse istantaneo di rotazione, poichè, come è noto, la posizione del detto asse rispetto al triedro di riferimento è determinata dalle quantità p, q, n. Giova però ricordare che questi movimenti periodici sono riferiti ad assi mobili rispetto alla massa terrestre, per cui il vero movimento dell'asse istantaneo di rotazione nell'interno della Terra risulta dalla combinazione di tutti i movimenti periodici dell'asse medesimo rispetto al triedro di riferimento e del movimenlo di questo rispetto alla massa terrestre.