ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 20 gennaio 1918.

F. D'Ovidio, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle varietà a tre dimensioni dotate di terne principali di congruenze geodetiche.* Nota II del Socio Gregorio Ricci.

5. È facile dimostrare che se in una V_3 esiste una terna ortogonale di congruenze ψ_h, per la quale tutte le rotazioni ϱ_{hk} siano costanti, della stessa proprietà godono tutte le terne, che da essa si traggono mediante una qualunque sostituzione ortogonale a coefficienti costanti e che, per effetto di una tale sostituzione, le ϱ_{hk} si comportano come i coefficienti di una forma bilineare covariante. Le V_3 dotate di quella proprietà (nelle quali evidentemente rientrano come caso particolare le V_3 della II^a classe) assieme alle terne principali (in generale una sola) caratterizzate dalle equazioni

$$\omega_{h+1\,h+2} = \omega_{h+2\,h+1} = 0\,,$$

che potremo chiamare *terne principali di 1^a specie*, ammettono dunque altre terne speciali (e in generale una sola) caratterizzate dalle equazioni

$$\varrho_{h+1\,h+2} + \varrho_{h+2\,h+1} = 0\,,$$

che chiameremo *terne principali di 2^a specie.*

Dimostreremo che per le V_3 della II^a classe le terne principali di 2^a specie sono anche terne principali di I^a specie e che tale proprietà spetta esclusivamente ad esse (di cui sono un caso particolare le varietà a curvatura costante positiva) ed alle varietà a curvatura costante negativa o nulla.

Fatte le posizioni

$$2\sigma_h = \varrho_{h+1\,h+2} + \varrho_{h+2\,h+1} \quad , \quad 2\delta_h = \varrho_{h+1\,h+2} - \varrho_{h+2\,h+1}$$

dalla (3) della Nota I^a^ si traggono facilmente le

$$\begin{aligned} \omega_{h+1\,h+2} &= \quad 2\varrho_{h+1}\,\delta_h + 2\varrho_h\,\sigma_h - 2\varrho_{h+2\,h}\,\sigma_{h+2} \\ \omega_{h+2\,h+1} &= -2\varrho_{h+2}\,\delta_h + 2\varrho_h\,\sigma_h - 2\varrho_{h+1\,h}\,\sigma_{h+1} \\ \omega_h &= 2\,.\,\varrho_{h+1}\,\varrho_{h+2} - 2\Sigma_i\,\delta_i^2 - 2\sigma_h^2 + 2\delta_{h+2}\,\sigma_{h+2} - 2\delta_{h+1}\,\sigma_{h+1}\,. \end{aligned}$$

Per le terne principali di 2^a^ specie abbiamo dunque in particolare

$$\begin{aligned} \omega_{h+1\,h+2} &= \quad 2\varrho_{h+1}\,\delta_h \\ \omega_{h+2\,h+1} &= -2\varrho_{h+2}\,\delta_h \\ \omega_h &= 2\varrho_{h+1}\,\varrho_{h+2} - 2\Sigma_i\,\delta_i^2. \end{aligned}$$

Ne segue che le equazioni (B) della Nota I assumono la forma notevole

$$\alpha_h\,\delta_h = 0\,,$$

e che una terna principale di 2^a^ specie è anche terna principale di 1^a^ specie nei seguenti casi soltanto:

1°. Se è $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$, cioè se si tratta di V_3 della II^a^ classe.

2°. Se è $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = 0$, nel qual caso risulta $\omega_h = -2\Sigma_i\,\delta_i^2$.

3°. Se si annullano due rotazioni ϱ_h e le corrispondenti δ_h, per esempio, se è $\varrho_2 = \varrho_3 = \delta_2 = \delta_3 = 0$, nel qual caso risulta $\omega_h = -2\delta_1^2$.

6. Come segue dalle (4) (Nota I) le V_3 della II^a^ classe hanno costanti gli invarianti e quindi le curvature riemanniane principali. Non è però vera la proposizione inversa; e ci proponiamo ora per prima cosa di stabilire a quali condizioni gli invarianti principali di una V_3 supposti costanti devano ancora soddisfare perchè le V_3 stesse, ammettendo una terna principale di congruenze geodetiche, appartengano alla II^a^ classe. Di più stabiliremo tali criterî, che, dati i valori numerici degli invarianti principali di una V_3 della II^a^ classe, ci consentano di riconoscere a quale appartenga delle tre sottoclassi, nelle quali la abbiamo suddivisa, con criterî desunti dai valori numerici delle tre anormalità spettanti alle singole congruenze geodetiche principali.

Risulta ancora dalle equazioni (4), che le V_3 della II^a^ classe hanno due invarianti principali nulli, o non ne hanno alcuno.

Cominciamo dal considerare il primo caso e sia:

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \ ; \ \omega_3 \neq 0\,.$$

Dalle (4) seguono in tali ipotesi le

$$\varrho_3 = 0 \ , \ 2\,\varrho_1\,\varrho_2 = \omega_3\,.$$

In questo caso, dati gli invarianti principali, rimane dunque indeterminata la anormalità $\alpha_3 = \varrho_1 + \varrho_2$, la quale potrà supporsi positiva o nulla purchè tale che le rotazioni ϱ_1 e ϱ_2 risultino reali. E poichè essa, come si potrebbe dimostrare e come lascia supporre il suo significato, è invariante di fronte ad ogni sostituzione ortogonale, che si eseguisca sulle congruenze ψ_1 e ψ_2, a valori diversi di α_3 corrispondono delle V_3 intrinsecamente distinte.

Per conseguenza il caso, che stiamo studiando, si suddivide in due distinti secondo che è

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \ , \ \omega_3 > 0 \ , \ \alpha_3 = c^2 \, ,$$

essendo $c^2 > 2\omega_3$; ovvero

$$\omega_1 = \omega_2 = 0 \ , \ \omega_3 < 0 \ , \ \alpha_3 = c^2 \, ,$$

essendo $c^2 \geq 0$. E poichè nel primo caso ϱ_1 e ϱ_2 risultano entrambi positive e di segni opposti nel secondo, si conclude che si tratta rispettivamente di V_3 della 2ª e della 3ª sottoclasse.

7. Se tutti gli invarianti principali e quindi tutte le rotazioni sono diverse da 0, dalle (4) seguono le

$$\varrho_h^2 = \frac{\omega_{h+1}\,\omega_{h+2}}{2\omega_h} \, , \tag{4'}$$

per le quali in funzione degli invarianti principali risultano determinati i valori assoluti delle ϱ_h. Esse ci dicono che il caso, che ora esaminiamo, si può suddividere in due e cioè:

a) se tutti gli invarianti principali sono positivi;

b) se un invariante principale è positivo e due sono negativi.

Le (4) ci dicono poi che nel caso *a*) tutte le ϱ_h, e quindi le α_h, si possono assumere positive, che cioè si tratta di varietà appartenenti alla sottoclasse 2ª.

Nel caso *b*) invece due rotazioni devono essere assunte positive ed una negativa o viceversa. Secondo le uguaglianze o disuguaglianze possibili tra i valori assoluti degli invarianti principali esso si scinde negli otto casi seguenti, che conviene separatamente esaminare.

b_1) I tre invarianti principali hanno valori assoluti eguali.

Suppongasi $\omega_3 = -\omega_1 = -\omega_2$. Per le (4) sarà $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Si tratta dunque di varietà della sottoclasse 1ª.

b_2) I due invarianti negativi sono eguali ed in valore assoluto maggiori del positivo.

Suppongasi $-\omega_3 = -\omega_2 > \omega_1 > 0$. Si possono assumere $\varrho_1 > 0$, $\varrho_2 = \varrho_3 < 0$ e risultano così $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$. Si tratta dunque di varietà della sottoclasse 3ª.

b_3) I due invarianti negativi sono eguali e minori in valore assoluto del positivo.

Suppongasi $\omega_3 > -\omega_2 = -\omega_1$. Si possono assumere $\varrho_1 = \varrho_2 > -\varrho_3$, $-\varrho_3 > 0$ e risultano allora positive tutte le anormalità. Queste varietà appartengono dunque alla sottoclasse 2ª.

b_4) I due invarianti negativi hanno valori assoluti diversi, e il minore dei loro valori assoluti è uguale all'invariante positivo.

Sia $-\omega_3 > -\omega_2 = \omega_1$. Sarà $\alpha_3 = \varrho_2 + \varrho_1 = 0$ e potremo assumere $\varrho_1 = -\varrho_2 > -\varrho_3 > 0$, donde $\alpha_2 > 0$, $\alpha_1 < 0$. Si tratta di varietà della 3ª sottoclasse.

b_5) I due invarianti negativi hanno valori diversi, e il maggiore dei loro valori assoluti eguaglia l'invariante positivo.

Sia $\omega_3 = -\omega_2 > -\omega_1 > 0$. Sarà $\alpha_1 = \varrho_2 + \varrho_3 = 0$ e potremo assumere $\varrho_1 > \varrho_2 = -\varrho_3 > 0$, donde $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$. Si tratta di varietà della sottoclasse 2ª.

b_6) I tre invarianti principali hanno valori assoluti distinti, e il positivo ha il valore assoluto minimo.

Sia $-\omega_2 > -\omega_3 > \omega_1 > 0$; e si assumano ϱ_1 positivo, ϱ_2 e ϱ_3 negativi. Sarà $\varrho_1 > -\varrho_3 > -\varrho_2 > 0$, e quindi $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$. Si tratta di varietà della sottoclasse 3ª.

b_7) I tre invarianti principali hanno valori assoluti distinti e il positivo è compreso tra i valori assoluti dei negativi.

Sia $-\omega_2 > \omega_3 > -\omega_1 > 0$, e si assumano ϱ_1 e ϱ_2 positivi, ϱ_3 negativo. Sarà $\varrho_1 > -\varrho_3 > \varrho_2 > 0$, cioè $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$. Si tratta ancora di varietà della sottoclasse 3ª.

b_8) I tre invarianti principali hanno valori assoluti distinti e il positivo supera in valore assoluto i due negativi.

Sia $\omega_3 > -\omega_1 > -\omega_2 > 0$, e si assumano ϱ_1 e ϱ_2 positivi, ϱ_3 negativo. Sarà $\varrho_2 > \varrho_1 > -\varrho_3 > 0$ e quindi $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$, e si tratterà di varietà della sottoclasse 2ª.

Riassumendo concludiamo che:

« Costituiscono la classe IIª quelle V_3, le cui curvature riemanniane « principali sono costanti e tali che uno degli invarianti principali risulti « negativo e gli altri due nulli; ovvero, uno degli invarianti principali es« sendo positivo, gli altri due risultino insieme nulli o dello stesso segno ».

In particolare:

« La 1ª sottoclasse è costituita dalle V_3, i cui invarianti principali « eguali in valore assoluto sono uno positivo e due negativi.

« La 2ª dalle V_3, i cui invarianti principali sono tutti positivi e da « quelle per le quali uno solo di tali invarianti è positivo, mentre degli « altri due (insieme negativi o nulli) nessuno lo supera e uno al più lo « eguaglia in valore assoluto.

« La 3^a dalle V_3, che ammettono un invariante principale negativo e « due nulli, e da quelle, che ammettono un invariante principale positivo e « due negativi, il primo essendo in valore assoluto minore di uno almeno « di questi ».

Alla 2^a sottoclasse appartengono in particolare le varietà a curvatura costante positiva.

8. Poichè per le varietà della classe II^a le rotazioni ϱ_h sono costanti le equazioni (β) del § 2 sono identicamente soddisfatte e quindi le equazioni (α) sono completamente integrabili. Di più, per quanto fu dimostrato nella Nota precedente, fissati i valori delle ϱ_h o, per essi, quelli degli invarianti principali, la corrispondente V_3 è intrinsecamente determinata e per ottenerne la determinazione analitica intrinseca basta determinare per le (α) un sistema integrale particolare qualunque purchè tale che il determinante

$$\lambda = (\lambda_{1/1}\,\lambda_{2/2}\,\lambda_{3/3})$$

risulti diverso da 0.

Cominciamo dal fare ciò per le varietà della 1^a sottoclasse:

$$(\alpha_1 = \alpha_2 = 0\ .\ \alpha_3 > 0).$$

Per queste assumeremo

$$\psi_1 = dx_1\ ,\ \psi_2 = dx_2$$

cioè

$$\lambda_{1/1} = \lambda_{2/2} = 1\quad ;\quad \lambda_{1/2} = \lambda_{1/3} = \lambda_{2/1} = \lambda_{2/3} = 0\,.$$

Risulterà

$$\lambda = \lambda_{3/3}$$

e, assunto ancora

$$\lambda_{3/1} = 0\,,$$

rimarranno da determinare $\lambda_{3/2}$ e $\lambda_{3/3}$ in modo che, essendo $\lambda_{3/3} \neq 0$, siano soddisfatte le equazioni

$$\frac{\partial\lambda_{3/2}}{\partial x_3} - \frac{\partial\lambda_{3/3}}{\partial x_2} = 0\ ,\ \frac{\partial\lambda_{3/3}}{\partial x_1} = 0\ ,\ \frac{\partial\lambda_{3/2}}{\partial x_1} = -\,\alpha_3\,.$$

Ciò poi si ottiene assumendo

$$\lambda_{3/2} = -\,\alpha_3\,x_1\ ,\ \lambda_{3/3} = 1$$

e quindi

$$\psi_3 = -\,\alpha_3\,x_1\,dx_2 + dx_3\,.$$

Dunque

$$ds^2 = dx_1^2 + (1 + \alpha_3^2 x_1^2)\,dx_2^2 + dx_3^2 - 2\,\alpha_3\,x_1\,dx_2\,dx_3\,,$$

essendo α_3 costante positiva, è una espressione canonica del ds^2 delle varietà della 1^a sottoclasse.

Le equazioni immediatamente integrabili delle loro congruenze principali sono poi:

$$dx_2 = 0\ ,\ dx_3 = 0\ \ ;\ \ dx_1 = 0\ ,\ dx_2 = \alpha_3\, x_1\, dx_2\ \ ;\ \ dx_1 = 0\ ,\ dx_2 = 0\,.$$

In fine, come risulta dalle (4),

$$\omega_3 = -\,\omega_1 = -\,\omega_2 = \frac{1}{2}\,\alpha_3^2$$

sono le espressioni dei loro invarianti principali e quindi

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \frac{1}{4}\,\alpha_3^2\ \ ,\ \ \omega_{33} = -\,\frac{3}{4}\,\alpha_3^2$$

quelle delle loro curvature principali riemanniane.

Essendo in questo caso $\omega_{11} = \omega_{22} \neq \omega_{33}$ $\varrho_1 = \varrho_2$ riconosciamo che le varietà di questa classe ammettono un gruppo a quattro parametri di movimenti rigidi.

9. Passiamo a considerare la sottoclasse 2ª $(\alpha_1 \geq 0\ ,\ \alpha_2 > 0\ ,\ \alpha_3 > 0)$ cominciando dal supporre $\alpha_1 = 0$. Potremo porre

$$\psi_1 = dx_1$$

cioè

$$\lambda_{1/1} = 1\ ,\ \lambda_{1/2} = \lambda_{1/3} = 0\,.$$

Sarà così

$$\lambda = \lambda_{2/2}\,\lambda_{3/3} - \lambda_{2/3}\,\lambda_{3/2}$$

e, posto ancora

$$\lambda_{2/1} = \lambda_{3/1} = 0\,,$$

rimarranno da determinare $\lambda_{2/2}\,,\,\lambda_{2/3}\,,\,\lambda_{3/2}\,,$ e $\lambda_{3/3}$ in suolo che risulti $\lambda \neq 0$ e siano soddisfatte le equazioni

$$(\alpha_0)\ \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda_{2/2}}{\partial x_3} - \dfrac{\partial\lambda_{2/3}}{\partial x_2} = 0\ ,\ \dfrac{\partial\lambda_{3/3}}{\partial x_1} = \alpha_2\,\lambda_{3/3}\ ,\ \dfrac{\partial\lambda_{2/2}}{\partial x_1} = \alpha_2\,\lambda_{3/2} \\[2ex] \dfrac{\partial\lambda_{3/2}}{\partial x_3} - \dfrac{\partial\lambda_{3/3}}{\partial x_2} = 0\ ,\ \dfrac{\partial\lambda_{3/3}}{\partial x_1} = -\,\alpha_3\,\lambda_{2/3}\ ,\ \dfrac{\partial\lambda_{3/2}}{\partial x_1} = -\,\alpha_3\,\lambda_{2/2}\,. \end{cases}$$

Ciò si ottiene ponendo

$$\theta = \sqrt{\alpha_2\,\alpha_3}\ x_1\ \ (^1)$$

$$\sqrt{\alpha_3}\,\lambda_{2/2} = \cos\theta\ ,\ \sqrt{\alpha_3}\,\lambda_{2/3} = -\sin\theta$$

$$\sqrt{\alpha_2}\,\lambda_{3/2} = -\sin\theta\ ,\ \sqrt{\alpha_2}\,\lambda_{3/3} = -\cos\theta\,.$$

(1) Qui ed in seguito per i radicali quadratici si intenderanno scelti i loro valori positivi.

Si hanno così per ψ_2 e ψ_3 (cambiando, come è permesso, il segno di ψ_3) le espressioni:

$$\sqrt{\alpha_3} \cdot \psi_2 = \cos\theta\, dx_2 - \sin\theta\, dx_3 \;,\; \sqrt{\alpha_3}\, \psi_3 = \sin\theta\, dx_2 + \cos\theta\, dx_3 \,,$$

e per il ds^2 delle varietà di questa classe vale quindi la espressione canonica:

$$ds^2 = dx_1^2 + \left(\frac{\sin^2\theta}{\alpha_2} + \frac{\cos^2\theta}{\alpha_3}\right) dx_2^2 + \left(\frac{\sin^2\theta}{\alpha_3} + \frac{\cos^2\theta}{\alpha_2}\right) dx_3^2$$
$$+ \left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_3}\right) \sin 2\theta\, dx_2\, dx_3 \,.$$

Le equazioni delle congruenze principali, anche in questo caso immediatamente integrabili, sono:

$$dx_2 = 0 \,,\, dx_3 = 0 \;;\; dx_1 = 0 \,,\, \sin\theta\, dx_2 + \cos\theta\, dx_3 = 0 \,;$$
$$dx_1 = 0 \,,\, \cos\theta\, dx_2 - \sin\theta\, dx_3 = 0 \,.$$

In fine dalle (4') seguono per gli invarianti principali e per le curvature riemanniane principali le espressioni

$$2\omega_1 = -(\alpha_2 - \alpha_3)^2 \,,\; 2\omega_2 = -2\omega_3 = \alpha_2^2 - \alpha_3^2 \,;$$

$$\omega_{11} = \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}\right)^2 ,\; \omega_{22} = \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}\right)^2 - \alpha_2^2 \,,\; \omega_{33} = \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2}\right)^2 - \alpha_3^2 \,.$$

Se è $\alpha_1 > 0$, facciamo le posizioni

$$\lambda_{1/1} = 1 \,,\; \lambda_{2/1} = \lambda_{3/1} = \lambda_{1/3} = 0 \,. \tag{7}$$

Rimarranno da determinare $\lambda_{1/2}, \lambda_{2/2}, \lambda_{2/3}, \lambda_{3/2}$ e $\lambda_{3/3}$ in modo che sia $\lambda \neq 0$ e risultino soddisfatte le equazioni

$$(\alpha_1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \lambda_{1/2}}{\partial x_1} = 0 \,,\; \frac{\partial \lambda_{1/2}}{\partial x_3} = \alpha_1 \lambda \\
&\frac{\partial \lambda_{2/3}}{\partial x_2} - \frac{\partial \lambda_{2/2}}{\partial x_3} = \alpha_2\, \lambda_{3/3}\, \lambda_{1/2} \\
&\frac{\partial \lambda_{3/2}}{\partial x_3} - \frac{\partial \lambda_{3/3}}{\partial x_2} = \alpha_3\, \lambda_{2/3}\, \lambda_{1/2} \\
&\frac{\partial \lambda_{2/2}}{\partial x_1} = \alpha_2\, \lambda_{3/2} \,,\; \frac{\partial \lambda_{2/3}}{\partial x_1} = \alpha_2\, \lambda_{3/3} \\
&\frac{\partial \lambda_{3/2}}{\partial x_1} = -\alpha_3\, \lambda_{2/2} \,,\; \frac{\partial \lambda_{3/3}}{\partial x_1} = -\alpha_3\, \lambda_{2/3} \,.
\end{aligned}\right.$$

Si soddisfa alle ultime quattro ponendo

$$(7') \qquad \begin{cases} \sqrt{\alpha_3}\,\lambda_{2/2} = \cos\theta \ , & \sqrt{\alpha_3}\,\lambda_{2/3} = \cos(\theta + \psi) \\ \sqrt{\alpha_2}\,\lambda_{3/2} = -\sin\theta \ , & \sqrt{\alpha_2}\,\lambda_{3/3} = -\sin(\theta + \psi) \ , \end{cases}$$

con

$$(8) \qquad \theta = \sqrt{\alpha_2\,\alpha_3} \cdot x_1$$

e ψ funzione arbitraria di x_2 e di x_3.

Alle altre si soddisfa ponendo

$$(7'') \qquad \lambda_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2\,\alpha_3}} \frac{\partial\psi}{\partial x_2}$$

e per ψ un integrale della equazione

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\,\partial x_3} + \alpha_1 \sin\psi = 0$$

qualunque, perchè diverso da 0, essendo $\sqrt{\alpha_2\,\alpha_3} \cdot \lambda = -\sin\psi$.

Per ottenere un tale integrale si ponga

$$x = x_2 + x_3$$

e si assuma ψ funzione della sola x.

Essa dovrà soddisfare alla equazione

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha_1 \sin\psi = 0 \ ,$$

la quale ammette l'integrale primo

$$\sqrt{2\alpha_1} \cdot dx = \frac{d\psi}{\sqrt{\cos\psi}} \ ,$$

ovvero, posto

$$y = \sqrt{\cos\psi} \ ,$$

$$\sqrt{\frac{\alpha_1}{2}}\,dx = -\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 - y^4}} \ ;$$

donde [1]

$$(9) \qquad \frac{1}{\cos\psi} = 2\,\wp(-\sqrt{\alpha_1} \cdot x\,,\,1\,,\,0) = \frac{2}{\alpha_1}\,\wp(x_2 + x_3\,,\,\alpha_1^2\,,\,0) \ .$$

La espressione (7″) di $\lambda_{1/2}$, per la (9), assume la forma

$$\lambda_{1/2} = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{\alpha_2\,\alpha_3}\cos\psi} \ ,$$

[1] Cfr. Appell et Lacour, *Principes de la théorie des fonctions ellyptiques*, Paris, G. V., 1897, pag. 89; e Humbert, *Cours d'Analyse*, Paris, G. V., 1904, tomo II, pag. 223.

e quindi abbiamo per le forme fondamentali e per il ds^2 delle varietà della 2^a sottoclasse le espressioni

$$\psi_1 = dx_1 + \sqrt{\frac{2\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3}\cos\psi}\, dx_2$$

$$\sqrt{\alpha_3}\,\psi_2 = \cos\theta\, dx_2 + \cos(\theta+\psi)\, dx_3$$

$$\sqrt{\alpha_2}\,\psi_3 = \sin\theta\, dx_2 + \sin(\theta+\psi)\, dx_3$$

$$ds^2 = dx_1^2 + \left(\frac{\sin^2\theta}{\alpha_2} + \frac{\cos^2\theta}{\alpha_3} + \frac{2\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3}\cos\psi\right) dx_2^2$$
$$+ \left(\frac{\cos^2(\theta+\psi)}{\alpha_3} + \frac{\sin^2(\theta+\psi)}{\alpha_2}\right) dx_3^2 + 2\sqrt{\frac{2\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3}\cos\psi}\, dx_1\, dx_2$$
$$+ 2\left(\frac{\cos\theta\cos(\theta+\psi)}{\alpha_3} + \frac{\sin\theta\sin(\theta+\psi)}{\alpha_2}\right) dx_2\, dx_3\,;$$

θ e ψ risultando definite dalle (8) e (9).

Questi risultati comprendono, come è naturale, quelli superiormente ottenuti supponendo $\alpha_1 = 0$; nel qual caso dalla (9) risulta $\psi = \frac{\pi}{2}$.

In particolare essi sono applicabili agli spazii a curvatura costante positiva K, pei quali è da porre $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 2\sqrt{K}$. Per essi risulta:

$$\psi_1 = dx_1 + \sqrt[4]{\frac{\cos^2\psi}{K}}\, dx_2$$

$$\sqrt[4]{4K}\cdot\psi_2 = \cos\theta\, dx_2 + \cos(\theta+\psi)\, dx_3$$

$$\sqrt[4]{4K}\cdot\psi_3 = \sin\theta\, dx_2 + \sin(\theta+\psi)\, dx_3\,,$$

essendo

$$\theta = 2\sqrt{K}\, x_1\,,\quad \frac{1}{\cos\psi} = \frac{1}{2\sqrt{K}}\,\wp(x_2+x_3\,,\, 4K\,,\, 0)\,.$$

Abbiamo così una nuova espressione per il loro ds^2. Di più abbiamo determinata per essi una speciale terna ortogonale, che si distingue da tutte le altre per la proprietà, che le congruenze di linee, che la costituiscono, sono tutte geodetiche.

10. Rimangono da considerare le varietà della 3^a sottoclasse ($\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 < 0$).

Si supponga dapprima $\alpha_1 = 0$ e si assuma, come nel caso analogo considerato nel § precedente,

$$\lambda_{1/1} = 1\ ,\ \lambda_{1/2} = \lambda_{1/3} = \lambda_{2/1} = \lambda_{3/1} = 0\,.$$

Rimarranno ancora da determinare $\lambda_{2/2}, \lambda_{2/3}, \lambda_{3/2}$ e $\lambda_{3/3}$ in modo che risulti

$\lambda \neq 0$ e siano soddisfatte le equazioni (α_0). Tutto ciò si ottiene ponendo

$$\theta = \sqrt{-\alpha_2\alpha_3}\cdot x_1$$

$$\sqrt{-\alpha_3}\,\lambda_{2/2} = \cos h\theta \;,\; \sqrt{-\alpha_3}\,\lambda_{2/3} = \sin h\theta$$

$$\sqrt{\alpha_2}\,\lambda_{3/2} = \sin h\theta \;,\; \sqrt{\alpha_2}\cdot\lambda_{3/3} = \cos h\theta\,.$$

Abbiamo così

$$\psi_1 = dx_1$$

$$\sqrt{-\alpha_3}\cdot\psi_2 = \cos h\theta\, dx_2 + \sin h\theta\, dx_3 \;;\; \sqrt{\alpha_2}\,\psi_3 = \sin h\theta\, dx_2 + \cos h\theta\, dx_3$$

$$ds^2 = dx_1^2 + \left(\frac{\sin h^2\theta}{\alpha_2} + \frac{\cos h^2\theta}{-\alpha_3}\right)dx_2^2 + \left(\frac{\sin h^2\theta}{-\alpha_3} + \frac{\cos h^2\theta}{\alpha_2}\right)dx_3^2$$
$$+ \left(\frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{-\alpha_3}\right)\sin h2\theta\, dx_2\, dx_3\,.$$

Anche in questo caso le equazioni delle congruenze principali sono immediatamente integrabili e per gli invarianti e per le curvature riemanniane principali valgono le espressioni stabilite per la 2ª sottoclasse nel caso $\alpha_1 = 0$.

I risultati, a cui siamo giunti per la 3ª sottoclasse, si semplificano notevolmente se è $\alpha_2 + \alpha_3 = 0$. In particolare per gli invarianti e per le curvature riemanniane principali valgono allora le espressioni

$$\omega_1 = -2\alpha_2^2 \;,\; \omega_2 = \omega_3 = 0$$

$$\omega_{11} = -2\omega_{22} = -2\omega_{33} = 2\alpha_2^2\,,$$

e da queste ultime segue che si tratta di varietà dotate di un gruppo di movimenti rigidi a quattro parametri.

Sia $\alpha_1 > 0$. Fatte ancora le posizioni (7), le cose procedono come nel caso analogo considerato nel paragrafo precedente colla sola differenza che alle posizioni (7′) e (7″) sono da sostituire le

$$\sqrt{-\alpha_3}\,\lambda_{2/2} = \cos h\theta \;,\; \sqrt{-\alpha_3}\,\lambda_{2/3} = \sin h(\theta+\psi)$$

$$\sqrt{\alpha_2}\,\lambda_{3/2} = \sin h\theta \;,\; \sqrt{\alpha_2}\,\lambda_{3/3} = \cos h(\theta+\psi)$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{-\alpha_2\alpha_3}}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\,.$$

essendo

(8′) $$\theta = \sqrt{-\alpha_2\alpha_3}\cdot x_1$$

e ψ funzione di x_2 e di x_3 soltanto, la quale soddisfi alla equazione

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2\,\partial x_3} - \alpha_1\cos h\psi = 0\,.$$

Assunta ancora per ψ una funzione della sola $x = x_2 + x_3$, essa dovrà soddisfare alla equazione

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \alpha_1 \cos h\psi = 0\,,$$

che ammette l'integrale primo

$$\frac{d\psi}{dx} = \sqrt{2\alpha_1 \sin h\psi}\,,$$

per il quale si ha poi

$$\lambda_{1/2} = \sqrt{\frac{2\alpha_1}{-\alpha_2\alpha_3}} \sin h\psi\,.$$

Posto

$$y = \sqrt{i \sin h\psi}\,,$$

rimane da integrare la equazione

$$\sqrt{\frac{i\,\alpha_1}{2}}\, dx = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}\,.$$

Essa si integra, come nel caso analogo presentatosi nel paragrafo precedente, per mezzo delle funzioni ellittiche di Weierstrass e si ottiene

$$\text{(9')} \qquad \frac{1}{\sin h\psi} = \frac{2}{\alpha_1}\, \wp(x_2 + x_3\,,\, -\alpha_1^2\,,\, 0)\,.$$

Riassumendo per le V_3 della 3ª sottoclasse abbiamo:

$$\psi_1 = dx_1 + \sqrt{\frac{2\alpha_1}{-\alpha_2\alpha_3}} \sin h\psi\, dx_2$$

$$\sqrt{-\alpha_3}\,\psi_2 = \cos h\theta\, dx_2 + \sin h(\theta + \psi)\, dx_3$$

$$\sqrt{\alpha_2}\,\psi_3 = \sin h\theta\, dx_2 + \cos h(\theta + \psi)\, dx_3$$

$$\begin{aligned} ds^2 = dx_1^2 &+ \left(\frac{\sin h^2\theta}{\alpha_2} + \frac{\cos h^2\theta}{-\alpha_3} + \frac{2\alpha_1 \sin h\psi}{-\alpha_2\alpha_3}\right) dx_2^2 \\ &+ \left(\frac{\sin h^2(\theta+\psi)}{-\alpha_3} + \frac{\cos h^2(\theta+\psi)}{\alpha_2}\right) dx_3^2 \\ &+ 2\left(\frac{\sin h\theta \cos h(\theta+\psi)}{\alpha_2} + \frac{\cos h\theta \sin h(\theta+\psi)}{-\alpha_3}\right) dx_2\, dx_3 \\ &+ 2\sqrt{\frac{2\alpha_1}{-\alpha_2\alpha_3}} \sin h\psi\, dx_1\, dx_2\,, \end{aligned}$$

θ e ψ essendo definite dalle (6') e (7').

Questi risultati comprendono come caso particolare quelli stabiliti sopra nella ipotesi $\alpha_1 = 0$. Aggiungiamo che, se si suppone invece $\alpha_1 > 0$, si possono ottenere per le forme fondamentali altre espressioni le quali (scambiate semplicemente fra di loro ψ_1 e ψ_3) differiscono da quelle stabilite per la sottoclasse 2ª soltanto perchè α_1 vi è sostituito da $-\alpha_1$, ed x_2+x_3 da x_2-x_3

11. Raccogliamo ora i risultati ottenuti in uno specchio, a chiarimento del quale è da ricordare:

1°) che con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ rappresentiamo gli invarianti principali delle varietà considerate, per i quali si esprimono le curvature principali ω_h, mediante le

$$\omega_{hh} = \frac{\omega_1+\omega_2+\omega_3}{2} - \omega_h ;$$

2°) che con ψ_1, ψ_2, ψ_3 designamo le forme fondamentali, note le quali si possano scrivere subito le equazioni

$$\psi_{i+1}=0 \ , \ \psi_{i+2}=0$$

delle congruenze principali ed il ds^2 della varietà, essendo

$$ds^2 = \psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2 ;$$

3°) che con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ designamo le anormalità delle dette congruenze.

Classe Iª.

$$\psi_1 = dx_1 \ , \ \psi_2 = dx_2 - (\varrho_1 - c)\, x_3\, dx_1 \ , \ \psi_3 = dx_3 + (\varrho_1 + c)\, x_3\, dx_1$$
$$\omega_1 = -2c^2 \ , \ \omega_3 = -\omega_2 = 2c\varrho_1$$

c costante, ϱ_1 funzione di x_1 soltanto.

Classe IIª.

Sottoclasse 1ª.

$$\psi_1 = dx_1 \ , \ \psi_2 = dx_2 \ , \ \psi_3 = -\alpha_3\, x_1\, dx_2 + dx_3$$
$$\omega_3 = -\omega_1 = -\omega_2 = \tfrac{1}{2}\alpha_3^2$$

α_3 costante positiva.

Sottoclasse 2ª.

$$\psi_1 = dx_1 + \sqrt{\frac{2\alpha_1}{\alpha_2\,\alpha_3}}\cos\psi\, dx_2$$
$$\sqrt{\alpha_3}\cdot\psi_2 = \cos\theta\, dx_2 + \cos(\theta+\psi)\, dx_3$$
$$\sqrt{\alpha_2}\ \ \psi_3 = \sin\theta\, dx_2 + \sin(\theta+\psi)\, dx_3$$
$$\theta = \sqrt{\alpha_2\,\alpha_3}\cdot x_1 \ , \ \cos\psi = \frac{\alpha_1}{2\mathfrak{p}(x_2+x_3\,,\,\alpha_1^2\,,\,0)}$$
$$2\omega_h = \alpha_h^2 - (\alpha_{h+2} - \alpha_{h+1})^2$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ costanti, di cui la prima positiva o nulla e le altre positive.

Sottoclasse 3^a.

$$\psi_1 = dx_1 + \sqrt{-\frac{2\alpha_1}{\alpha_2\,\alpha_3}\sin h\psi\,dx_2}$$

$$\sqrt{-\alpha_3}\cdot\psi_2 = \cos h\theta\,dx_2 + \sin h(\theta+\psi)\,dx_3$$

$$\sqrt{\alpha_2}\,\psi_3 = \sin h\theta\,dx_2 + \cos h(\theta+\psi)\,dx_3$$

$$\theta = \sqrt{-\alpha_2\,\alpha_3}\cdot x_1 \;,\; \sin h\psi = \frac{\alpha_1}{2\wp(x_2+x_3\,,\,-\alpha_1^2\,,\,0)}$$

$$2\omega_h = \alpha_h^2 - (\alpha_{h+2} - \alpha_{h+1})^2\,,$$

α_1, α_2, α_3 costanti, di cui la prima positiva o nulla, la seconda positiva e la terza negativa.

Meccanica celeste. — *Ricerche sopra la previsione dell'urto nel problema dei tre corpi*. Nota di G. Armellini, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

1. Nella presente Nota noi ci proponiamo di risolvere il seguente

Problema. — « *Date le coordinate e le velocità iniziali di tre corpi che si attirano secondo la legge di Newton e supposto che il momento della quantità di moto del sistema sia diverso da zero, ricercare se tra i corpi stessi avrà luogo qualche urto. In caso di risposta affermativa determinare l'istante in cui accadrà il primo urto* ».

2. A tale scopo siano $C_1\,C_2\,C_3$ i tre corpi, $r_1\,r_2\,r_3$ le tre distanze C_2C_3 C_1C_3 C_1C_2 e indichiamo con t il tempo. Poichè il momento della quantità di moto del sistema è diverso da zero, siamo sicuri che i tre corpi non possono urtarsi simultaneamente.

Costruiamoci allora l'integrale

$$\text{(1)} \qquad S(t) = \int_0^t \frac{dt}{(r_1\,r_2\,r_3)^2}\,,$$

dove le r s'immaginano espresse in funzione del tempo. La S risulterà allora funzione *reale positiva* e *crescente* pei valori reali e positivi di t, e s'annullerà per $t = 0$.

Cfr. Painlevé, *Sur les singularités des équations de la Dynamique et sur le problème des trois corps* (C. R., t. 123, pp. 871 e segg.; *Sur le cas du problème des trois corps où deux corps se choquent au bout d'un temps fini* (C. R., t. 125, pag. 1075); *Leçons sur la théorie analytique des éq. différentielles*, professées a Stockholm ecc.