ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Sottoclasse 3ª.

$$\psi_1 = dx_1 + \sqrt{-\frac{2\alpha_1}{\alpha_2\,\alpha_3}\sin h\psi\,dx_2}$$

$$\sqrt{-\alpha_3}\cdot\psi_2 = \cos h\theta\,dx_2 + \sin h(\theta+\psi)\,dx_3$$

$$\sqrt{\alpha_2}\,\psi_3 = \sin h\theta\,dx_2 + \cos h(\theta+\psi)\,dx_3$$

$$\theta = \sqrt{-\alpha_2\,\alpha_3}\cdot x_1\ ,\ \sin h\psi = \frac{\alpha_1}{2\wp(x_2+x_3\,,\,-\alpha_1^2\,,\,0)}$$

$$2\omega_h = \alpha_h^2 - (\alpha_{h+2} - \alpha_{h+1})^2\,,$$

$\alpha_1\,,\,\alpha_2\,,\,\alpha_3$ costanti, di cui la prima positiva o nulla, la seconda positiva e la terza negativa.

Meccanica celeste. — *Ricerche sopra la previsione dell'urto nel problema dei tre corpi.* Nota di G. Armellini, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

1. Nella presente Nota noi ci proponiamo di risolvere il seguente

Problema. — « *Date le coordinate e le velocità iniziali di tre* « *corpi che si attirano secondo la legge di Newton e supposto che il* « *momento della quantità di moto del sistema sia diverso da zero, ricer-* « *care se tra i corpi stessi avrà luogo qualche urto. In caso di risposta* « *affermativa determinare l'istante in cui accadrà il primo urto* ».

2. A tale scopo siano $C_1\,C_2\,C_3$ i tre corpi, $r_1\,r_2\,r_3$ le tre distanze C_2C_3 C_1C_3 C_1C_2 e indichiamo con t il tempo. Poichè il momento della quantità di moto del sistema è diverso da zero, siamo sicuri che i tre corpi non possono urtarsi simultaneamente.

Costruiamoci allora l'integrale

$$\text{(1)}\qquad S(t) = \int_0^t \frac{dt}{(r_1\,r_2\,r_3)^2}\,,$$

dove le r s'immaginano espresse in funzione del tempo. La S risulterà allora funzione *reale positiva* e *crescente* pei valori reali e positivi di t, e s'annullerà per $t = 0$.

Cfr. Painlevé, *Sur les singularités des équations de la Dynamique et sur le problème des trois corps* (C. R., t. 123, pp. 871 e segg.; *Sur le cas du problème des trois corps où deux corps se choquent au bout d'un temps fini* (C. R., t. 125, pag. 1075); *Leçons sur la théorie analytique des éq. différentielles*, professées a Stockholm ecc.

Sia τ l'istante in cui ha luogo il *primo* urto a partire dall'origine dei tempi $t=0$, e supponiamo p. es. che esso abbia luogo tra C_1 e C_2. Allora, per noti teoremi, mentre t tende a τ, le distanze r_1 ed r_2 tendono a limiti fissi ϱ_1 e ϱ_2, mentre r_3 tende a zero divenendo nulla come $\sqrt[3]{t^2}$ rispetto a t. *Ne segue che la funzione* $S(t)$ *diverrà infinita per* $t=\tau$.

3. In breve, mentre t cresce per valori reali da 0 a τ, la S si mantiene reale e positiva e cresce da 0 a ∞. Verrà quindi a stabilirsi una corrispondenza biunivoca tra i valori reali del tempo compresi nell'intervallo $0 \leqq t \leqq \tau$ e i valori reali e positivi della S; la corrispondenza sarà anche continua tranne all'estremo superiore per cui a $t=\tau$ corrisponde $S=\infty$ e viceversa.

4. Prendiamo ora una nuova funzione $T(t)$ definita dall'equazione

$$T(t)=\frac{S}{1+S}=1-\frac{1}{1+S}, \tag{2}$$

da cui inversamente

$$S(t)=\frac{T}{1-T}. \tag{3}$$

Dalla (2) risulta che per valori di t compresi nell'intervallo $0 \leqq t \leqq \tau$, la $T(t)$ è una funzione *reale positiva* e *crescente* dell'argomento t, la quale si annulla per $t=0$ e diviene eguale all'unità per $t=\tau$.

5. Prendiamo ora un valore reale qualsiasi T_0 di T compreso fra lo zero e l'unità, l'estremo superiore *escluso*. Ad esso per la (3) verrà a corrispondere un valore S_0 di S e quindi per la (1) un valore t_0 di t reale, positivo e compreso fra 0 e τ, l'estremo superiore *escluso*. Ne segue che essendo t_0 un punto di regolarità le coordinate dei tre corpi e quindi le distanze r saranno funzioni olomorfe in $t-t_0$; anche T risulterà perciò olomorfa in $t-t_0$.

6. Ciò posto dalla (2) e dalla (1) derivando e combinando si ottiene immediatamente

$$\frac{dt}{dT}=(r_1 r_2 r_3)^2 (1+S)^2. \tag{4}$$

Ora, poichè nell'istante t_0 non ha luogo alcun urto, tutte le r sono diverse da zero e quindi la derivata $\frac{dt}{dT}$ risulta in esso positiva e *non nulla*. Sono perciò *verificate* le condizioni necessarie e sufficienti per l'*inversione* e noi potremo affermare che *nell'intorno di* T_0 *il tempo* t *e le coordinate dei tre corpi sono sviluppabili in serie di potenze intere e positive di* $T-T_0$, *convergenti per* $|T-T_0|$ *sufficientemente piccolo.*

Tutto ciò naturalmente vale per ogni valore di T_0 compreso nell'intervallo da $T_0 = 0$ a $T_0 = 1$, l'estremo superiore restando sempre *escluso*.

7. Ne risulta che se consideriamo T come una variabile complessa e se, prendendo per *centro* l'origine $T = 0$, disegnamo sul suo piano di rappresentazione la *stella* di Mittag-Leffler relativa al tempo t, essa conterrà il segmento $0 \leq T \leq 1$, formando l'estremo superiore $T = 1$ un *vertice* della stella medesima.

Allora, seguendo le regole note, potremo rappresentare il tempo t in serie convergente di polinomi P_h in T ed avremo perciò uno sviluppo della forma:

$$(5) \qquad t = \sum_{h=0}^{h=\infty} P_h(T) = \sum_{h=0}^{h=\infty} \sum_{i=0}^{i=h} a_{hi} T^i .$$

I coefficienti a_{hi} potranno tutti calcolarsi (con una certa arbitrarietà, come è noto dalla teoria della stella) una volta conosciuti i valori iniziali delle coordinate e delle velocità dei tre corpi nell'istante iniziale $t = T = 0$. *Noi dovremo quindi considerare le costanti a_{hi} come quantità note.*

8. In pratica per ottenere facilmente i coefficienti a_{hi} potremo valerci del metodo del Borel (¹).

Essendo $t = T = 0$ un punto di regolarità per il movimento, nell'intorno di $T = 0$ possiamo sviluppare t in serie di potenze intere e positive di T

$$(5^{bis}) \qquad t = \sum \lambda_m T^m \qquad (\lambda_0 = 0).$$

Poichè conosciamo le coordinate e le velocità iniziali, i coefficienti λ_m si determinano senza difficoltà; ed è agevole anche di determinare una costante K più piccola del raggio di convergenza delle serie (5^{bis}).

Ciò posto consideriamo la funzione $\dfrac{K}{K - T}$ e sviluppiamola in serie di polinomi Q(T) secondo i procedimenti di Runge e Painlevé:

$$(5^{ter}) \qquad \frac{K}{K - T} = \sum Q_n(T) = \sum \sum \gamma_{nm} T^m .$$

I coefficienti γ sono facilmente determinabili e la (5^{ter}) è convergente per tutti i punti del piano complesso della variabile T, eccettuata la parte dell'asse reale da $T = K$ a $T = \infty$.

Ciò posto lo sviluppo cercato di t in serie di polinomi in T è il seguente

$$(5^{quater}) \qquad t = \sum \sum \gamma_{ni} \lambda_i T^i .$$

(¹) Cfr. Vivanti, *Theorie der eindeutigen analytischen funktionen* (pag. 372). Avvertiamo che il Vivanti, per semplicità, suppone nello sviluppo (5^{ter}) $K = 1$.

Secondo note teorie [1], esso converge uniformemente in tutti i punti interni alla stella.

9. Ciò posto essendo la serie (5) funzione continua, positiva e crescente di T nell'intervallo *aperto* (cioè escludente l'estremo superiore) $0 \leqq T < 1$, ne segue che facendo tendere T all'unità la serie $\sum\limits_{h=0}^{h=\infty} \sum\limits_{i=0}^{i=h} a_{hi} T^i$:

a) o tenderà ad un limite positivo ben determinato e finito A;

b) oppure tenderà all'infinito.

Esaminiamo separatamente questi due casi; ma prima, ad evitare ogni equivoco, facciamo notare al lettore che noi affermiamo *soltanto* che la nostra serie *tende ad un limite* positivo o all'infinito, e non già che essa assume questi valori per $T = 1$. Così per es. la serie $\sum u_n$, dove si ha:

$$u_n = x(1 - x^2)^{n-1}$$

è convergente ed uguale a $+\frac{1}{x}$ nell'intervallo aperto $-1 < x < 0$ e tende quindi all'infinito negativo quando x tende, crescendo, a zero: eppure per $x = 0$ il suo valore è zero.

10. *Caso I.* — Supponiamo che si abbia:

$$\lim_{T=1} \sum_{h=0}^{h=\infty} \sum_{i=0}^{i=h} a_{hi} T^i = A . \tag{6}$$

Dico che in questo caso il primo urto tra i tre corpi avrà luogo precisamente nell'istante $t = A$.

Per vederlo, facciamo infatti crescere t verso τ. Ambedue i membri della (5) tendono allora verso limiti determinati e finiti: il primo membro, evidentemente, verso τ; il secondo membro, secondo l'ipotesi, verso A. Ora se due quantità si mantengono costantemente uguali in tutti i punti interni di un dato intervallo ed ammettono limiti all'estremo superiore, questi limiti sono certamente uguali. Dunque ecc.

11. *Caso II.* — Supponiamo ora che si abbia:

$$\lim_{T=1} \sum_{h=0}^{h=\infty} \sum_{i=0}^{i=\infty} a_{hi} T^i = \infty. \tag{7}$$

Dico che in questo caso non avrà mai luogo alcun urto tra i tre corpi.

Infatti supponiamo p. es. che il primo urto abbia luogo nell'istante τ e facciamo crescere t tendendo verso τ. Risulterebbe allora che il primo membro della (5) avrebbe per limite τ, mentre il secondo membro l'infinito: ciò che è assurdo, giacchè i due membri restando uguali in tutti i

[1] Cfr. Vivanti, op. cit., pag. 363.

punti interni dell'intervallo $0 \leq T < 1$ ed ammettendo limiti all'estremo superiore, questi debbono risultare uguali. Dunque ecc.

12. *Siamo dunque riusciti a costruire un'espressione, la quale se tende all'infinito c'indica che l'urto è impossibile, e se invece ha un limite finito ci dà con questo, l'istante del primo urto. Il problema che ci proponevamo è quindi risoluto.*

13. Faremo ancora osservare, che noi ci siamo occupati solo degli *urti futuri* (cioè che hanno luogo per $t > 0$), ma che il metodo può applicarsi con poche modificazioni anche alla ricerca degli *urti passati*. La mancanza di spazio c' impedisce però di sviluppare questo argomento.

14. Termineremo questa Nota cercando di ricollegare il presente risultato, con altri relativi allo stesso problema ed ormai divenuti classici.

È noto che il Painlevé (op. cit.) affermò che per l'esistenza dell' urto dovevano verificarsi due condizioni analitiche distinte, senza però dare ulteriori particolari.

Nel 1903 il prof. Levi-Civita [1] studiando il problema ristretto dei tre corpi costruì una relazione analitica uniforme, caratteristica sia degli urti passati (eiezioni) che dei futuri (collisioni) e pervenne anche ad un nuovo integrale, diverso da quello dell'energia. Più tardi il Bisconcini [2] costruì le due condizioni del Painlevé nel caso generale, ammettendo che nelle vicinanze dell' urto di C_1 con C_2 la velocità angolare del raggio vettore $C_1 C_2$ restasse finita: ciò che fu dimostrato vero dal Sundman.

Ora in una prossima Nota io spero di poter mostrare che, nel caso generale, le due condizioni del Painlevé possono ricavarsi dall'esistenza di un limite finito per l'espressione che abbiamo ottenuta. Nel caso del problema ristretto vedremo che una di queste condizioni si riduce ad un' identità, restando quindi per gli urti l' unica condizione del Levi-Civita.

[1] Cfr. Levi-Civita, *Traiettorie ed urti nel problema ristretto dei tre corpi* (Ann. di Mat., 1903); id. id., *Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps* (Acta Math., n. 4).

[2] *Sur le problème des trois corps* (Acta Math., 1804).