ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCXV.

1918

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXVII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1918

Matematica. — *Differenziali esatti.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrispondente R. Marcolongo.

Nell'A. V. G. [*Analyse véctorielle générale*, di C. Burali-Forti et R. Marcolongo, Pavia, Mattei], vol. I, pag. 118 sono ottenute, con tre procedimenti diversi, sebbene simili, le condizioni affinchè le espressioni differenziali αdP, $\mathbf{u}\wedge dP$, $\mathbf{u}\times dP$ (con α omografia ed $\mathbf{u}$ vettore funzioni del punto P che varia in un campo a tre dimensioni) siano *differenziali esatti* in tutto il campo. Tali condizioni, insieme ad altre, possono tutte essere facilmente ridotte ad *una sola*; quella che deve esser soddisfatta affinchè $\alpha d\mathbf{u}$ sia differenziale esatto in tutto il campo in cui varia P (campo a tre dimensioni). Ciò ottengo mediante la riduzione di una notevole espressione vettoriale alternata (n. 1). Inoltre, tenendo conto della recente ed importante introduzione, fatta da P. Burgatti e R. Marcolongo, degli *operatori differenziali* d/dP, div, rot, grad, Rot, Δ, Δ' *su di una superficie* [1] trovo pure la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'espressione differenziale $\alpha d\mathbf{u}$, e tutte le altre che ne derivano, sia differenziale esatto quando P varia su di una superficie σ.

1. *Se* α, β *sono omografie funzioni del punto* P, *allora, qualunque siano i vettori* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, *costanti o funzioni di* P *si ha sempre*

$$(1)\qquad \frac{d\alpha}{dP}\mathbf{x}\cdot\beta\mathbf{y}-\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{y}\cdot\beta\mathbf{x}=\{\mathrm{K\,Rot\,K}(\alpha\beta)-\alpha\cdot\mathrm{K\,Rot\,K}\beta\}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}).$$

Essendo $\mathbf{a}$ vettore arbitrario indipendente da P, costante, si ha, successivamente, applicando note regole esposte in A. V. G. [2],

$$\left\{\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{x}\cdot\beta\mathbf{y}-\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{y}\cdot\beta\mathbf{x}\right\}\times\mathbf{a}=\mathbf{y}\times\mathrm{K}\beta\cdot\left(\frac{d\mathrm{K}\alpha}{dP}\mathbf{x}\right)\mathbf{a}-\mathbf{x}\times\mathrm{K}\beta\cdot\left(\frac{d\mathrm{K}\alpha}{dP}\mathbf{y}\right)\mathbf{a}=$$
$$\mathbf{y}\times\mathrm{K}\beta\cdot\frac{d(\mathrm{K}\alpha\mathbf{a})}{dP}\mathbf{x}-\mathbf{x}\times\mathrm{K}\beta\cdot\frac{d(\mathrm{K}\alpha\mathbf{a})}{dP}\mathbf{y}=2\mathrm{V}\left\{\mathrm{K}\beta\cdot\frac{d(\mathrm{K}\alpha\mathbf{a})}{dP}\right\}\times(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})=$$
$$[\{\mathrm{Rot}(\mathrm{K}\beta\cdot\mathrm{K}\alpha)-\mathrm{Rot\,K}\beta\,.\,\mathrm{K}\alpha\}\mathbf{a}]\times(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})=$$
$$\mathbf{a}\times\{\mathrm{K\,Rot\,K}(\alpha\beta)-\alpha\cdot\mathrm{K\,Rot}_1\mathrm{K}\beta\}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})$$

che per l'arbitrarietà di $\mathbf{a}$ dimostra la (1) [3].

(1) P. Burgatti, *I teoremi del gradiente, della divergenza,...* Mem. della R. Acc. delle Scienze di Bologna, ser. VII, tomo IV; R. Marcolongo, *Su alcuni operatori superficiali*, Rend. R. Accad. dei Lincei, vol. XXVI, ser. 5ª, 2° sem. 1917, pag. 263 e segg.

(2) Cfr. anche, A. Pensa, *Alcuni operatori differenziali omografici*, Atti R. Acc. di Torino, vol. XLVIII (1912).

(3) Introducendo l'operatore binario S di M. Pieri [A. V. G., vol. I, pag. 95] il primo membro della (1) assume la forma

$$\mathrm{S}(\alpha,\beta\mathbf{y})\mathbf{x}-\mathrm{S}(\alpha,\beta\mathbf{x})\mathbf{y}.$$

Se nella (1) al posto di α si pone l'omografia assiale $\mathbf{u}\wedge$ si ha la formula notevole

$$\left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{x}\right)(\mathbf{u}\wedge\mathbf{y})-\left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{y}\right)(\mathbf{u}\wedge\mathbf{x})=\left\{\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{u}-\mathrm{H}(\mathbf{u},\mathrm{grad}\,\alpha)\right\}(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y}).$$

2. In tutto ciò che segue α è omografia ed $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono vettori, funzioni del punto P che varia, o in uno spazio (continuo, ecc.) a tre dimensioni, ovvero in una superficie σ la cui normale nel punto generico P è parallela al vettore unitario $\mathbf{N}$ che è pure funzione di P.

Affinchè l'espressione differenziale

$$\alpha\, d\mathbf{u} \tag{2}$$

sia differenziale esatto in tutto il campo è necessario e sufficiente che

$$\mathrm{Rot\,K}\left(\alpha \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) = 0\,, \tag{2'}$$

ovvero

$$\left\{\mathrm{K\,Rot}_\sigma\,\mathrm{K}\left(\alpha \cdot \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)_\sigma\right)\right\}\mathbf{N} = 0\,, \tag{2''}$$

secondo che P varia nel campo a tre dimensioni o nella superficie σ.

Per d, δ spostamenti arbitrarî di P si ha dalla (1) e da A. V. G., vol. I, pag. 85, [6],

$$\begin{aligned} d(\alpha\,\delta\mathbf{u}) - \delta(\alpha\, d\mathbf{u}) &= d\alpha \cdot \delta\mathbf{u} - \delta\alpha \cdot d\mathbf{u} \\ &= \frac{d\alpha}{dP} dP \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dP}\delta P - \frac{d\alpha}{dP}\delta P \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dP} dP \\ &= \left\{\mathrm{K\,Rot\,K}\left(\alpha \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)\right\}(dP \wedge \delta P)\,. \end{aligned}$$

Ora: $\alpha\, d\mathbf{u}$ è differenziale esatto solamente quando, per d, δ spostamenti arbitrarî il primo membro della formula precedente è *nullo*; sarà nullo anche l'ultimo e per P variabile nel campo a tre dimensioni varrà la (2') poichè $dP \wedge \delta P$ è vettore arbitrario.

È facile dimostrare che: *tutte le formule di* A. G. V. *che contengono gli operatori differenziali* d/dP, div, rot, grad, Rot, Δ, Δ', *ma* NON *i loro prodotti, valgono inalterate per i medesimi operatori con l'indice σ, cioè sulla superficie.* Ciò posto valgono pure su σ (cioè per dP e δP normali ad $\mathbf{N}$) le eguaglianze precedenti e l'ultimo membro dà la (2'') poichè $dP \wedge \delta P$ è vettore parallelo ad $\mathbf{N}$.

3. Del teorema ora dimostrato è importante conseguenza il seguente:

L'espressione differenziale

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{u} \tag{3}$$

è un differenziale esatto in tutto il campo solamente quando

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{v}\right) = 0\,, \tag{3'}$$

ovvero

$$\mathbf{N} \times \mathrm{rot}_\sigma\left(\mathrm{K}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)_\sigma \mathbf{v}\right) = 0 \tag{3''}$$

secondo che P varia in un campo a tre dimensioni o sulla superficie σ.

Qualunque sia il vettore costante $\mathbf{a}$, è evidente che $\mathbf{v} \times d\mathbf{u}$ è differenziale esatto solamente quando è tale

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = \mathrm{H}(\mathbf{v}, \mathbf{a})\, d\mathbf{u}\,.$$

Siamo così ridotti al caso del n. 1 con $\alpha = \mathrm{H}(\mathbf{v}, \mathbf{a})$. Ma da A. V. G., vol. I, pag. 84, [3] si ha subito

$$\left[\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\left\{\mathrm{H}(\mathbf{v}, \mathbf{a})\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right\}\right](dP \wedge \delta P) =$$

$$\left[\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{H}\left(\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{v}, \mathbf{a}\right)\right](dP \wedge \delta P) =$$

$$\mathrm{H}\left\{\mathrm{rot}\left(\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{v}, \mathbf{a}\right)\right\}(dP \wedge \delta P) = \mathrm{rot}\left(\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{v}\,.\,\mathbf{a}\right) \times (dP \wedge \delta P) \cdot \mathbf{a}$$

il che dimostra, per la (2′), la (3′) poichè $\mathbf{a}$, $dP \wedge \delta P$ sono vettori arbitrarî. Dimostra pure (cfr. n. 2) la (3″) poichè $\mathbf{a}$ è arbitrario e $dP \wedge \delta P$ è parallelo ad $\mathbf{N}$.

4. Dal teorema del n. 3 risultano pure le condizioni affinchè

$$\mathbf{v} \wedge d\mathbf{u}\ ,\ \mathbf{v} \wedge \alpha\, d\mathbf{u}\ ,\ \alpha(\mathbf{v} \wedge d\mathbf{u})$$

siano differenziali esatti bastando sostituire ad α, rispettivamente, le omografie $\mathbf{v}\wedge$, $\mathbf{v} \wedge \alpha$, $\alpha \cdot \mathbf{v}\wedge$.

Dal teorema del n. 2 risulta pure la condizione affinchè $\mathbf{v} \times \alpha\, d\mathbf{u}$ sia differenziale esatto poichè $\mathbf{v} \times \alpha\, d\mathbf{u} = (\mathrm{K}\alpha\mathbf{v}) \times d\mathbf{u}$ e basta quindi sostituire $\mathrm{K}\alpha\mathbf{v}$ a $\mathbf{v}$.

Se nei teoremi del n. 2 e n. 3, e in quelli ora considerati, si pone $\mathbf{u} = P - O$, con O punto fisso, cioè $d\mathbf{u} = dP$, allora si trovano le condizioni affinchè

$$\alpha\, dP\ ,\ \mathbf{v} \wedge dP\ ,\ \mathbf{v} \wedge \alpha\, dP\ ,\ \alpha(\mathbf{v} \wedge dP)\ ,\ \mathbf{v} \times dP\ ,\ \mathbf{v} \times \alpha\, dP$$

siano differenziali esatti, sia per P variabile in un campo a tre dimensioni, sia per P variabile su σ. In quest'ultimo caso le condizioni (2″), (3″) equivalgono a quelle che da esse si ottengono sopprimendo l'indice σ; come il lettore può facilmente verificare. Inoltre per $d\mathbf{u} = dP$ si ritrovano, come è ovvio, le condizioni esposte a pag. 118 di A. V. G. quando P varia in un campo a tre dimensioni.

Delle condizioni $\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\left(\alpha \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) = 0$, $\mathrm{rot}\left(\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{v}\right) = 0$ per P variabile nello spazio a tre dimensioni, si può dare una dimostrazione assai più semplice di quella precedente, ma che peraltro, non solo non è valida per P variabile sulla superficie σ, ma non dà, nemmeno in modo indiretto, le condizioni affinchè $\alpha d\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\times d\mathbf{u}$ siano differenziali esatti su σ. Ecco la dimostrazione. Deve essere

$$\alpha d\mathbf{u} = d\mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{v}\times d\mathbf{u} = dm$$

ove $\mathbf{x}$ è vettore e m è numero funzione di P, ovvero

$$\alpha \frac{d\mathbf{u}}{dP} dP = \frac{d\mathbf{x}}{dP} dP \quad , \quad \left(\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{v}\right)\times dP = \mathrm{grad}\, m\times dP\,,$$

che, per essere dP vettore arbitrario, dànno

$$(\alpha) \qquad \mathrm{K}\left(\alpha\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) = \mathrm{K}\frac{d\mathbf{x}}{dP} \quad , \quad \mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{dP}\mathbf{v} = \mathrm{grad}\, m\,.$$

Dunque, affinchè $\alpha d\mathbf{u}$, $\mathbf{v}\times d\mathbf{u}$ siano differenziali esatti è necessario e sufficiente che esistano $\mathbf{x}$ ed m soddisfacenti alle (α); ma in virtù delle [6], [2] del n. 69 di A. V. G., dalle (α) si elimina $\mathbf{x}$ ed m operando con Rot e rot e si ritrovano le condizioni già ottenute per altra via (¹).

5. Quando P varia sulla superficie σ, si ottengono dei casi particolari assai interessanti se al posto dei vettori generici $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ si pongono (ordine arbitrario) i vettori $P - O$, $\mathbf{N}$ e alla omografia generica α si sostituisce l'omografia $d\mathbf{N}/dP$ o la ciclica di questa (²). Sarebbe importante che questi casi particolari fossero studiati e completamente svolti. Qui ne citiamo uno come esempio.

Affinchè $\mathbf{u}\wedge dP$ sia differenziale esatto, variando P in σ, deve essere, per la (2″)

$$(\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}_\sigma\, \mathbf{u}\wedge)\, \mathbf{N} = 0$$

(¹) Operando nelle (α) con Rot e rot e facendo uso soltanto delle [6] n. 44 e [3] n. 39 di A. V. G. si dimostra che le condizioni in questione sono *necessarie*; mentre le [6], [2] del n. **69** provano che sono *necessarie* e *sufficienti*.

(²) Per tali casi particolari saranno utili le formule seguenti nelle quali si è posto $\lambda = d\mathbf{N}/dP$.

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{N} = \mathrm{rot}_\sigma \mathbf{N} = 0 \quad , \quad \mathrm{div}\,\mathbf{N} = \mathrm{div}_\sigma \mathbf{N} = \mathrm{I}_1\lambda$$

$$\mathrm{Rot}\,\lambda = 0 \quad , \quad \mathrm{Rot}_\sigma \lambda = -\mathbf{N}\wedge\frac{d\lambda}{dP}\mathbf{N}$$

$$\mathrm{grad}\,\lambda = \mathrm{grad}_\sigma\lambda = \mathrm{grad}\,\mathrm{I}_1\lambda$$

$$\mathrm{grad}_\sigma \mathrm{I}_1\lambda = \mathrm{grad}\,\mathrm{I}_1\lambda + \mathrm{I}_1\lambda^2\,.\,\mathbf{N} = \mathrm{grad}\,\mathrm{I}_1\lambda + \{(\mathrm{I}_1\lambda)^2 - 2\mathrm{I}_2\lambda\}\,\mathbf{N}$$

$$\mathrm{grad}_\sigma \mathrm{C}\lambda = \mathrm{I}_1\lambda^2\,.\,\mathbf{N} = -\,\mathrm{grad}\,\mathrm{I}_1\lambda\times\mathbf{N}\,.\,\mathbf{N}\,.$$

Cfr. le mie Note, *Gradiente, rotazione e divergenza in una superficie* (Atti Acc. Torino, vol. XLV); *Alcune applicazioni alla geometria differenziale...* (idem, vol. XLVI); *Fondamenti per la geometria differenziale...* (Rend. Palermo, tomo XXXIII). Nella prima Nota per il gradiente su σ di una omografia si tenga conto (Burgatti e Marcologo, loc. cit.) del nuovo significato generale di grad_σ, che coincide con Grad solo quando è applicato a un numero.

condizione che si trasforma successivamente in

$$C K \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)_\sigma \mathbf{N} = 0 \ , \quad \left\{ \mathrm{div}_\sigma \mathbf{u} - \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)_\sigma + (\mathrm{rot}_\sigma \mathbf{u}) \wedge \right\} \mathbf{N} = 0$$

$$\mathrm{div}_\sigma \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{N} \wedge \mathrm{rot}_\sigma \mathbf{u} = 0 \ ;$$

ma i due termini di questa sono vettori, l'uno parallelo e l'altro normale ad $\mathbf{N}$ e quindi la condizione cercata è

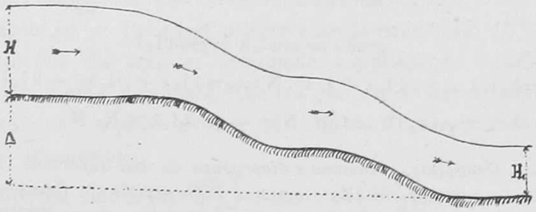
$$(a) \qquad \mathrm{div}_\sigma \mathbf{u} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{N} \wedge \mathrm{rot}_\sigma \mathbf{u} = 0$$

dalla quale potrà, forse, dedursi la forma generica di $\mathbf{u}$ quando siano completamente studiate le equazioni differenziali su σ (altro argomento importante di studio che semplificherà notevolmente l'ordinaria algebra-geometrica su σ).

Conviene notare che le (a) sono soddisfatte per $\mathbf{u} = \mathbf{N}$ quando σ è superficie di *area minima*; cioè per σ superficie di *area minima* esiste un vettore $\mathbf{x}$ funzione di P per il quale $\mathbf{N} \wedge dP = d\mathbf{x}$ qualunque sia lo spostamento d ed è interessante determinare il vettore $\mathbf{x}$ che deve avere notevole importanza per la superficie.

Idromeccanica. — *Una formola per la determinazione di dislivelli dei corsi d'acqua mediante misure di velocità.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Si consideri un canale scoverto a fondo comunque conformato; il liquido perfetto pesante, che in esso fluisce, sia animato da moto permanente ed irrotazionale. Si ammette che in due sezioni trasversali del canale, di eguale conformazione geometrica, il fondo del canale sia orizzontale (sensibilmente) ed il regime uniforme (essenzialmente diverso se vi è dislivello del fondo tra la sezione a monte e quella a valle).



Detti c e c_1 i valori delle velocità nelle predette sezioni e H l'altezza del pelo libero sul fondo, nella sezione a monte, il dislivello del fondo tra